

Análisis de la señal ECG con expansiones ortogonales de reducido número de coeficientes

Salvador Olmos[#], José García[#], Raimon Jané[&] y Pablo Laguna[#]

([#]) Dpt. Ingeniería Electrónica y Comunicaciones, Centro Politécnico Superior. Univ. de Zaragoza
([&]) Dpt. ESAII-Centre de Recerca d'Enginyeria Biomèdica. Universitat Politècnica de Catalunya

Resumen

En este trabajo se muestra como la representación de una señal recurrente, como el ECG, mediante expansiones ortogonales con un número reducido de coeficientes se comporta como un filtro tiempo variante periódico. Se analizan sus respuestas impulsionales y frecuenciales instantáneas tanto para el caso de estimación con producto escalar como con el algoritmo adaptativo LMS.

1 Introducción.

La representación de una señal en términos de un conjunto de funciones ortogonales es una técnica conocida en procesamiento de señal que permite representar funciones complejas como una combinación lineal de componentes simples y elementales [1]. Por otra parte, una adecuada elección de las funciones ortogonales permite que cada uno de los coeficientes que describen la señal posean información complementaria e independiente. Por ejemplo: componentes de distinta frecuencia utilizando la transformada de Fourier, valor de la señal en un instante de tiempo usando la transformada identidad, componentes frecuenciales localizadas en el tiempo usando la transformada *wavelet*, etc.

Es de desear que estas transformadas logren representar una gran parte de la energía de la señal mediante un número reducido de coeficientes. Analizando este reducido conjunto de coeficientes se han presentado herramientas de análisis de la señal ECG con diversas aplicaciones: compresión de datos [2], detección y análisis de diversas patologías [3], filtrado o cancelación [4], etc. En este trabajo se realiza un análisis del efecto de utilizar un número reducido de coeficientes en las transformadas cuando se estiman con dos técnicas habitualmente utilizadas: producto escalar y estimación adaptativa con el algoritmo LMS. Se comparan ambos métodos, utilizando descripciones en el dominio temporal y en el dominio frecuencial.

2 Producto escalar.

El producto escalar (PE) de la señal a estudiar con las funciones base de la transformada es la forma más

común de estimar los coeficientes cuando la relación señal a ruido es alta. Es la solución al problema de minimizar el error cuadrático medio entre la señal original y su representación como combinación lineal reducida de las funciones base. Cuando se utilizan todas las N funciones del espacio, se logra representar toda la energía de la señal, con lo cual se puede decir que el sistema de estimación se comporta como la función identidad. Cuando el número de funciones se limita a una fracción $p < N$, ciertas componentes de la señal se descartan, produciéndose un efecto de filtrado, que es el objeto de estudio del presente trabajo.

Para interpretar el PE con p funciones base como un sistema expresamos la relación entrada salida para instantes del ciclo recurrente k

$$y[n] = \sum_{i=0}^{p-1} c_i \tilde{\Phi}_i[n], \quad (k-1)N < n < kN-1 \quad (1)$$

siendo $\tilde{\Phi}_i[n]$ la extensión periódica de cada función base $\Phi_i[n]$ y c_i los coeficientes del producto escalar de la señal del ciclo anterior para que el filtro sea causal

$$c_i = \sum_{j=(k-2)N}^{(k-1)N-1} \tilde{\Phi}_i[j] x[j]; \quad 0 < i < p-1. \quad (2)$$

Sustituyendo la ecuación (2) en (1) se obtiene la relación entrada salida

$$y[n] = \sum_{j=(k-2)N}^{(k-1)N-1} x[j] \left(\sum_{i=0}^{p-1} \tilde{\Phi}_i[n] \tilde{\Phi}_i[j] \right); \quad (k-1)N < n < kN-1 \quad (3)$$

donde se observa que la salida en el instante n se puede ver como una combinación lineal de la entrada de todo el ciclo anterior (retardo de N muestras) por valores de las funciones base, pero que varían con el instante n , es decir, es un filtro variante en el tiempo.

Para cuantificar este efecto se estudian las características de este sistema (respuesta impulsional y frecuencial) en función del número p de funciones utilizadas. Para ello se utiliza la transformada ortogonal óptima de Karhunen-Loève (KL) [5], pero se cumple de forma similar para el resto de transformaciones

ortogonales. Las bases de la transformada de KL se han estimado a partir de un conjunto de señales de las bases de datos MIT-BIH Arrhythmia y ESC-STT (remuestreados todos a 360 Hz). La respuesta impulsional $h[n, j] = \sum_{i=0}^{p-1} \tilde{\Phi}_i[n] \tilde{\Phi}_i[j]$ del sistema depende del instante j en el cual se aplica el impulso, y esto obedece al hecho de que la morfología de las funciones base son variantes con el tiempo. En la figura 1 se muestran las respuestas impulsionales cuando el impulso se aplica en diferentes instantes j dentro de cada latido cuando se utilizan $p=30$ funciones. La respuesta al impulso tiene duración finita (duración del latido $N=430$ muestras).

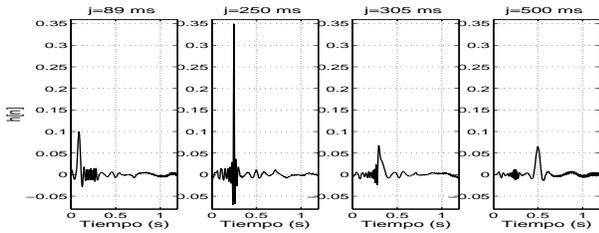


Figura 1: Respuestas impulsionales con PE $p=30$ funciones de KL en varios instantes de tiempo j .

En la figura 2 se muestran las respuestas frecuenciales correspondientes a varios instantes de tiempo, que en la figura se ubican respecto a la primera función base de KL (esquina superior izquierda). Es muy significativo notar que el sistema presenta un comportamiento pasabajo, pero de forma variable para cada instante. En la zona de las ondas P y T la frecuencia de corte es notablemente inferior a la zona del QRS. Este resultado concuerda con las componentes frecuenciales de cada una de las ondas del ECG, confirmandose que la transformada óptima de KL con $p=30$ funciones mantiene dichas componentes frecuenciales. Este comportamiento recuerda el hecho

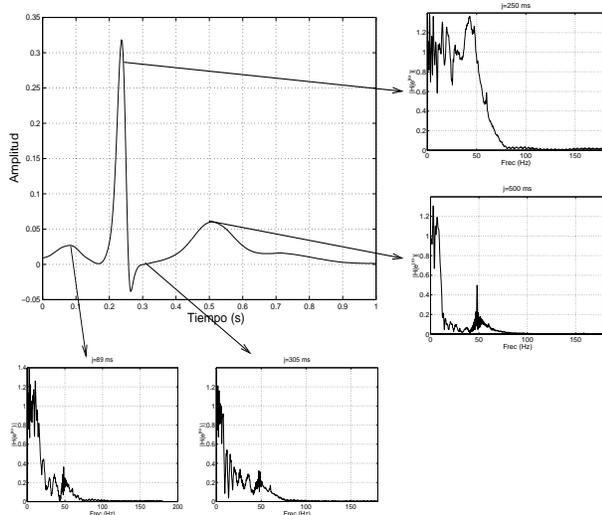


Figura 2: Respuestas frecuenciales con PE $p=30$ funciones de KL en varios instantes de tiempo j .

de que esta transformada se construye a medida para un conjunto de señales ECG, y por tanto sus primeras

funciones base recogen su morfología. La descripción del PE como un sistema lineal variante en el tiempo mediante sus respuestas impulsionales/frecuenciales instantáneas es una buena herramienta para escoger el número p de funciones idóneas para no producir determinado tipo de distorsión en la señal.

Otros tipo de transformadas como la DCT o funciones seno-coseno tienen sus funciones base con una única componente frecuencial, no siendo tan idóneas para la representación de la señal ECG, que presenta componentes frecuenciales diferentes a lo largo de un latido.

De forma anecdótica se puede observar la presencia de la interferencia de la red eléctrica (60 Hz en USA y 50 Hz en Europa) en las respuestas frecuenciales de la figura 2 debido a que las funciones base se calculan a partir de un conjunto de señales de aprendizaje con dichas componentes. La mayoría de los registros se almacenaron en cinta analógica con equipos portátiles con baterías, por lo que la interferencia de la red eléctrica aparece en el proceso de digitalización. Como algunos registros se digitalizaron a velocidad doble de la de grabación, aparecen además componentes de 30 Hz.

3 Algoritmo LMS.

Cuando la señal tiene componentes de ruido importantes, se suelen utilizar técnicas adaptativas para la estimación de los coeficientes, ya que permiten atenuar el ruido incorrelado con la señal [6], aprovechando las características recurrentes de la señal (figura 3). Las entradas de referencia al sistema adaptativo son las extensiones periódicas de las funciones base de la transformada $\tilde{\Phi}_i[n]$ (deterministas y ortogonales), por lo que su análisis presenta ciertas peculiaridades frente a las aplicaciones más habituales donde las entradas de referencia son señales aleatorias.

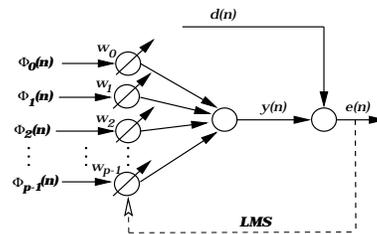


Figura 3: Estructura lineal adaptativa para estimación de coeficientes.

Varios autores han estudiado el comportamiento de este sistema [7], demostrando que se comporta en el caso más general como un filtro lineal variante en el tiempo. Cuando se utilizan todas las funciones base del espacio ($n=N$) para la estimación de los coeficientes, el sistema equivale a un filtro lineal tiempo-invariante, cuya función de transferencia es idéntica para todas las transformadas ortogonales, en particular, la transformada identidad, que se ha demostrado tener una respuesta frecuencial tipo

peine [7, 8]. Cuando se utiliza un número reducido de funciones base, el sistema es tiempo-variante, pero con comportamiento periódico, por lo que se puede abordar su estudio en un periodo.

Aplicando de forma repetida la clásica ecuación de actualización de los coeficientes del algoritmo LMS $\mathbf{W}[n+1] = \mathbf{W}[n] + 2\mu e[n] \Phi[n]$ (siendo $\Phi[n]$ el vector con el valor de las p bases en el instante n) es fácil describir el sistema como la ecuación en diferencias finitas (EDF) [7]

$$y[n] = 2\mu \sum_{i=0}^{n-1} e[i] (\tilde{\Phi}^T[i] \tilde{\Phi}[n]) \quad (4)$$

siendo

$$e[n] = d[n] + 2\mu \sum_{i=0}^{n-1} e[i] (\tilde{\Phi}^T[i] \tilde{\Phi}[n]). \quad (5)$$

Esta EDF es recursiva, de orden variable n creciente con el tiempo y donde los coeficientes son tiempo-variante $\tilde{\Phi}^T[i] \tilde{\Phi}[n] = r_{in}$, pero con comportamiento periódico, ya que $r_{in} = r_{(i+N)n} = r_{i(n+N)}$. Cuando se utiliza una base ortogonal completa ($p=N$), los productos escalares r_{in} son no nulos únicamente cuando $i-n = kN$. En ese caso particular se ha demostrado que el sistema se comporta como un filtro lineal tiempo-invariante, equivalente a un promediador exponencial con función de transferencia [7, 8]

$$\frac{Y(z)}{D(z)} = \frac{2\mu z^{-N}}{1 - (2\mu - 1)z^{-N}}. \quad (6)$$

Sin embargo, no tenemos constancia de que se haya realizado dicho análisis para un número reducido de funciones base, como es habitual en las aplicaciones de compresión de datos, análisis y detección de patologías, etc. En este caso, el sistema resultante resulta ser lineal variante en el tiempo, pero con comportamiento periódico. Para analizarlo, se propone determinar las respuestas al impulso unidad ubicado en cada uno de los instantes j del periodo $\{h[n, j]; j = 0, 1, \dots, N-1\}$, de forma similar a como se ha realizado en la sección anterior para el PE. Como el sistema es recursivo, la respuesta impulsional en este caso será infinita.

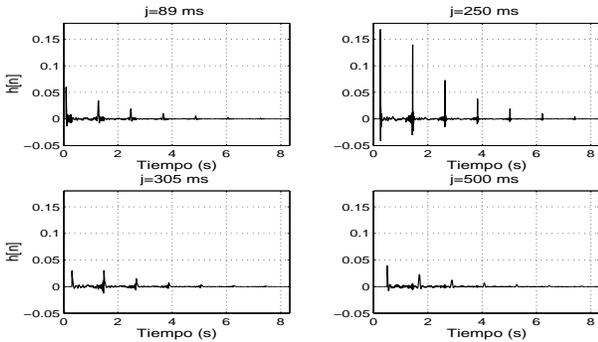


Figura 4: Respuestas impulsionales para LMS con 50 funciones de KL y $\mu=0.3$ en varios instantes de tiempo j .

En la figura 4 se muestran varias de estas respuestas impulsionales del sistema de la figura 3 en varios

instantes de tiempo j cuando se utilizan $p=30$ funciones. Pueden observarse las diferencias respecto a la

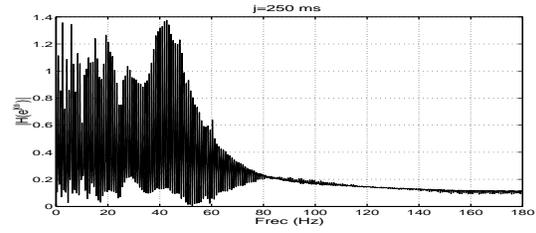


Figura 5: Respuesta frecuencial (con zooms) para LMS con 30 funciones de KL $\mu=0.3$ en $j=250$ ms.

respuesta impulsional cuando se utiliza una base completa (tren de deltas con envolvente exponencial decreciente dependiente del valor de μ , 0.3 para el caso presentado). Calculando la transformada de Fourier a cada una de las funciones anteriores se obtiene la respuesta frecuencial de cada instante j . Se obtiene que la envolvente de la respuesta frecuencial para LMS (figura 5) coincide con sus correspondientes del PE (figura 2), pero tienen un comportamiento tipo peine. Por tanto, atenuarán las componentes no repetitivas (incorreladas de la forma periódica) con la alineación de los latidos. Este comportamiento se degrada cuando en aquellas frecuencias en que los mínimos de los lóbulos del peine (que tienen amplitud $\mu/(1-\mu)$) superan el valor de la envolvente frecuencial. A modo de ejemplo se muestra en la figura 5 la respuesta frecuencial del LMS con $\mu = 0.3$ en el instante $j=250$ ms.

Si se utilizan valores de μ más pequeños, los mínimos de los lóbulos son más pequeños, y el filtro tipo peine tendrá por envolvente a la respuesta frecuencial del PE en un rango de frecuencias mayor. En la figura 6 se ilustra este efecto donde se compara la misma respuesta frecuencial que en la figura 5 utilizando valores de $\mu=0.3$ y 0.05. Este efecto explica desde un nuevo punto de vista el clásico compromiso de elección de μ (velocidad de convergencia respecto a errores cometidos en la señal de salida, desajuste).

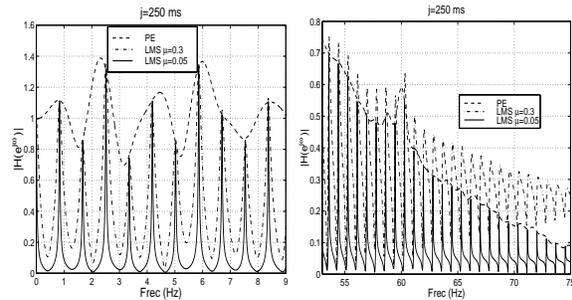


Figura 6: Detalles de las respuestas frecuenciales en $k=250$ ms para PE y LMS con $\mu = 0.3, 0.05$ para $p=30$ funciones de KL.

4 Aplicaciones.

4.1 Compresión de datos.

La aplicación más directa es la compresión de datos, donde la utilización de un número p reducido de

funciones es la clave de la compresión. Con el análisis presentado se puede cuantificar qué componentes frecuenciales de la señal quedan representadas en cada instante de tiempo de la señal ECG cuando se utiliza un número p reducido y variable de funciones ortogonales. Por ejemplo, las figuras 2 y 5 muestran cómo $p=30$ funciones son suficientes para representar las componentes frecuenciales de la señal ECG. A su vez, el análisis propuesto es un buen banco de pruebas que permite comparar las prestaciones de diversas transformadas ortogonales entre sí para representar señales con un número reducido de coeficientes.

4.2 Detección de isquemia con la KLT.

Recientemente se ha aplicado la transformada de KL sobre los segmentos ST-T para la detección de isquemia como un marcador más sensible que las clásicas medidas de nivel de ST y posición y amplitud de onda T [3]. Utilizando 1 ó 2 funciones base de KL se logra representar la mayor parte de la energía del complejo ST-T. Si se aplica el análisis presentado para estos valores se obtienen las respuestas frecuenciales en un punto del segmento ST (85 ms después del punto fiducial del QRS) y en otro de la onda T (345 ms después del punto fiducial del QRS) mostradas en la figura 7.

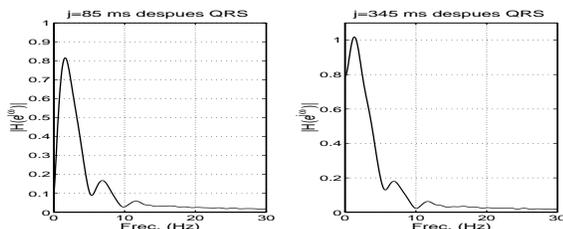


Figura 7: Respuestas frecuenciales aplicando 2 funciones de KL al complejo ST-T.

Se observa como con sólo 2 funciones de KL no se representan bien las muy bajas frecuencias en la zona del segmento ST, que tienen una alta información clínica para la detección de isquemia.

5 Conclusiones.

En este trabajo se ha analizado el comportamiento del producto escalar y el algoritmo LMS para estimar los coeficientes de transformadas ortogonales con un número $p < N$ reducido de funciones. Se demuestra como ambos sistemas se comportan como un filtro lineal variante en el tiempo de forma periódica. El producto escalar tiene una respuesta impulsional finita variante (dependiente del instante de aplicación del impulso), mientras que el algoritmo LMS tiene una respuesta impulsional infinita variante. En cuanto a las respuestas frecuenciales (también variantes) ambas tienen la misma envolvente, produciendo el mismo efecto de filtrado variante en el tiempo, pero con la diferencia de que la respuesta frecuencial del algoritmo LMS es tipo peine, por lo que logra atenuar las componentes

no repetitivas, y por tanto no correladas con la señal ECG. Ello hace que la estimación adaptativa de los coeficientes sea idónea para señales con componentes de ruido importantes.

El análisis presentado permite saber a priori qué componentes frecuenciales se logran representar o atenuar respectivamente al utilizar $p < N$ funciones ortogonales. Por tanto es un criterio útil para la determinación de p . Algunos campos de aplicación directos son: compresión de datos, análisis y detección de patologías mediante expansiones ortogonales reducidas y filtrado de señales. Los resultados se ilustran con la transformada de KL, siendo directamente extrapolables a otras transformaciones ortogonales.

Agradecimientos.

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por TIC97-0945-C02-01,02 (CICYT).

Referencias

- [1] N. Ahmed and K. R. Rao, *Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing*. Berlin · Heidelberg · New York: Springer-Verlag, 1975.
- [2] S. Olmos, P. Laguna, P. Caminal, and R. Jané, "Compresión de datos de la señal ECG mediante transformadas ortogonales," pp. 43–44, Asociación Española de Bioingeniería, 1995.
- [3] J. García, S. Olmos, L. Sornmo, M. Ringborn, P. Lander, G. Wagner, and P. Laguna, "Estudio comparativo de índices clásicos y basados en la KLT en monitorización y detección de isquemia de miocardio," in *Libro de actas del XII Symposium Nacional de la URSI*, pp. II:339–342, Unión Científica Internacional de Radio, 1997.
- [4] S. J. Elliott and P. Darlington, "Adaptive cancellation of periodic, synchronously sampled interference," *IEEE Trans. Acous. Sig. Proc.*, vol. 33, pp. 715–717, Jun 1985.
- [5] C. W. Therrien, *Discrete random signals and statistical signal processing*. Prentice-Hall, 1992.
- [6] B. Widrow and S. D. Stearns, *Adaptive Signal Processing*. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1985.
- [7] P. Clarkson and P. White, "Simplified analysis of the LMS adaptive filter using a transfer function approximation," *IEEE Trans. Acous. Sig. Proc.*, vol. 35, pp. 987–993, Jul 1987.
- [8] P. Laguna, R. Jané, E. Masgrau, and P. Caminal, "The adaptive linear combiner with a periodic-impulse reference input as a linear combiner," *Signal Processing*, vol. 48, pp. 193–203, 1996.

Dirección de contacto:

Salvador Olmos
 Dep. Ingeniería Electrónica y Comunicaciones
 Centro Politécnico Superior (Univ. de Zaragoza)
 C/Maria de Luna, 3. 50015-ZARAGOZA
 e-mail: olmos@posta.unizar.es