

Densidad Espectral de Potencia en Señales de Ritmo Cardíaco Muestreadas no Uniformemente *

Pablo Laguna, George B. Moody, y Roger G. Mark

Centro Politécnico Superior, Univ. de Zaragoza, Maria de Luna 3, 50015 Zaragoza, España

Resumen - En este trabajo se analiza el método de Lomb (MLO) para estimar la densidad espectral de potencia (PSD) en señales de ritmo cardíaco (HR) muestreadas no uniformemente (MNU). Cuando la no uniformidad del MNU se puede modelar como si fuera uniforme más una desviación aleatoria, el espectro de la señal resulta ser una repetición periódica del espectro de tiempo continuo con periodo el de la frecuencia *media* de Nyquist, más un efecto de filtrado paso bajo en las bandas superiores que depende de la dispersión del muestreo. La estimación en la banda base es no sesgada con una dispersión despreciable. Los resultados teóricos se han comprobado con señales de HR reales. Se ha comprobado como el MLO evita los problemas de filtrado paso bajo generados por métodos clásicos que necesitan remuestrear la señal, mostrándose más adecuado que estos últimos para este tipo de estimaciones.

I. INTRODUCCION

La variabilidad del ritmo cardíaco (HRV) se ha convertido en una herramienta útil para analizar el sistema cardíaco [1]. La HRV se analiza a partir de la serie dada por el HR y que constituye una señal muestreada no uniformemente. La PSD de la señal HR parece ser uno de los índices que mejor recogen la información clínica presente en dicha señal [1]. La estimación de la PSD con métodos clásicos (FFT y métodos autoregresivos) necesita realizar un remuestreo de la señal HR para que éste sea uniforme. Este remuestreo introduce desviaciones en la estimación de la PSD. Los latidos ectópicos introducen un ruido de banda ancha en el espectro, la eliminación de estos ectópicos y la posterior interpolación introduce nuevas alteraciones de la PSD estimada. Esta problemática ha sido recientemente abordada [2] usando un método de estimación de PSD que considera directamente las muestras no uniformes sin necesidad de remuestrear. La técnica esta basada en el método original de Lomb [3] de estimación de PSD sin remuestreo. En este trabajo se presenta un estudio analítico detallado del comportamiento frecuencial del MLO, comprobando los resultados de este análisis con señales reales de HR. Este análisis permite obtener una frecuencia límite a partir de la cual el espectro puede no estar libre de *aliasing*.

II. EL MÉTODO DE LOMB DE ESTIMACIÓN DE PSD

El Método de Lomb para estimar la PSD de una señal se basa en la minimización del cuadrado de la diferencia entre la señal en estudio y unas funciones base [3]. Sea $x(t)$ la señal de tiempo continuo que se quiere estudiar y $b_i(t)$ la base ortonormal que define la transformación. Los coeficientes $c(i)$ que representan a $x(t)$ en el dominio transformado son aquellos que minimizan el error

cuadrático $e(c)$ definido como: $e(c) = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - c(i)b_i(t))^2 dt$. Cuando la señal $x(t)$ se tiene solo en unos instantes de tiempo t_n espaciados no uniformemente, Lomb [3] propone estimar el espectro de Fourier ajustando el modelo $x(t_n) + \varepsilon_n = c b_i(t_n)$, de tal modo que la varianza de ε_n sea mínima, esto da un valor de c

$$c(i) = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^N x(t_n) b_i(t_n). \quad k = \sum_{n=1}^N b_i^2(t_n). \quad (1)$$

Este resultado puede interpretarse como una generalización del MLO para estimar transformaciones de datos MNU. La potencia de señal en el índice i de la transformación ($P_x(i)$) será [3]

$$P_x(i) = k \cdot c^2(i) = \hat{c}^2(i) \quad \hat{c}(i) = c(i) \sqrt{k} \quad (2)$$

si se trabaja con la transformada de Fourier (TF) entonces $k = N$ y $P_x(i) = P_x(f) = \hat{c}^2(f)$. Posteriormente, en [4] se presento un algoritmo rápido para estimar la PSD de Lomb. La incógnita que perdura es: ¿ Como es la relación entre esta estimación de la PSD y el espectro original de la señal $x(t)$ ($|x(f)|^2$)? A partir de la ecuación (1), y reescribiendola en otro modo en función de las deltas de Dirac $\delta(t)$ se tiene.

$$\hat{c}(i) = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^N x(t) \delta(t - t_n) b_i(t) dt. \quad (3)$$

Se puede ver que estos coeficientes así obtenidos son aquellos que resultan de la proyección de la señal $x_s(t) = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^N x(t) \delta(t - t_n)$ sobre la base $b_i(t)$. Ello significa que el espectro de Lomb es el espectro de la señal de tiempo continuo $x_s(t)$, y por tanto es el espectro $|x_s(f)|^2$. Nótese que se ha sustituido k por N dado que $\sum_{n=1}^N |e^{i2\pi f t_n}|^2 = N$. La relación entre $x_s(f)$ y $x(f)$ dará la relación entre el espectro estimado y el real.

III. PSD CON MUESTREO ALEATORIO

Conocer $x_s(f)$ requiere conocer la distribución de t_n . Sin embargo, en señales como HR la distribución de la series t_n puede ser modelada, sobre periodos estacionarios, como un muestreo uniforme (MU) con una variación aleatoria. Este hecho nos hace considerar el caso particular en que la distribución t_n satisface $E[t_n - t_{n-1}] = T$ y $E[t_n - nT] = 0 \forall n$. Entonces, t_n puede expresarse como $t_n = n \cdot T + \alpha_n$ donde α_n es una variable aleatoria con media nula y función de densidad de probabilidad $P_{\alpha_n}(\alpha_n)$. Aunque $x(t)$ se supone una señal determinista a estimar, la variable aleatoria α_n hace $x_s(t)$ un proceso aleatorio, y por tanto su TF $x_s(f)$, es también un proceso aleatorio. En este caso vamos a considerar la media $E[x_s(f)]$ y la varianza $\sigma_{|x_s(f)|^2}$ para tener información de como la estimación de Lomb de la PSD $|x_s(f)|^2$ está relacionada con el espectro real de la señal $|x(f)|^2$. Calculando el $E[x_s(f)]$ se tiene:

$$\bar{x}_s(f) = \frac{1}{\sqrt{N}} x(f) * \left[P_{\alpha}(f) \left(f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n f_s) * W(f) \right) \right], \quad (4)$$

*Este trabajo ha sido financiado por el proyecto TIC94-0608-02 CICYT, y PIT06/93 CONAI. España

donde $f_s = 1/T$ es la frecuencia media de muestreo, $W(f)$ es la TF de la ventana aplicada a la señal y $P_{\alpha_n}(f)$ es la función característica de $P_{\alpha_n}(\alpha_n)$. Esta expresión nos permite ahora interpretar $E[x_s(f)]$ en términos de la TF de un MU. $E[x_s(f)]$ es la convolución de la TF de la señal original $x(f)$ con la TF de la función de MU inventanada por el intervalo finito de observación $W(f)$ y pesada por la función característica del MNU aleatoriamente distribuido $P_{\alpha}(f)$. de nuevo aparece el teorema de muestreo para evitar el aliasing donde ahora la frecuencia de Nyquist la determina el intervalo medio de muestreo T . Par tanto para tener una correcta estimación de la PSD de la señal la frecuencia media de muestreo debe ser mayor que dos veces la mayor frecuencia de $x(t)$. Las bandas frecuenciales superiores representan (en media) la repetición de la banda base pesada por el valor de la función característica $P_{\alpha}(i \cdot f_s)$ evaluada a múltiplos de la frecuencia media de muestreo f_s . Cuando $P_{\alpha}(\alpha)$ es una distribución Gaussiana con desviación estandar σ , la función característica es también Gaussiana, $P_{\alpha}(f) = e^{-(2\pi^2 f^2 \sigma^2)}$, y representa un filtro paso bajo con una frecuencia de corte (f_c) a -3 dB de $f_c = 132.5/\sigma$. Por tanto la estimación de la PSD con el MLO en la banda base es no sesgada y cada i -ésima banda superior (en media) esta afectada por un factor que depende de la distribución del muestreo t_n a través del valor de σ y del orden de la banda i .

De estos resultados se observa que la banda-base (en media) estimada con el MLO es una estimación no sesgada de $x(f)$. Sin embargo, queda por estudiar cual es la varianza de la estimación. Calculando esta varianza se obtiene

$$\sigma_{|x_s(f)|^2} \leq 2\sqrt{E[x_s(f)]E[x_s(f)]^* + 2(\pi\sigma n f_s)^2} \sqrt{2(\pi\sigma n f_s)^2}. \quad (5)$$

donde n es el orden de la banda, y entonces en la banda base ($n = 0$) la varianza se convierte en nula y corrobora la estimación de Lomb como una buena estimación de la PSD de la señal $x(t)$. Nótese que la desviación incrementa con el valor del espectro a una frecuencia dada. Si la señal esta muestreada uniformemente ($\sigma = 0$) se recupera el espectro clásico para estas señales. A medida que aumenta el orden de la banda $n > 0$ aparece un sesgo en la estimación y la varianza aumenta, con el orden de la banda, la frecuencia de muestreo y la dispersión de este.

IV. ANÁLISIS DEL PSD DE LA SEÑAL DE HR

En la figura 1a se muestra una señal de HR de un paciente con marcapasos perteneciente al registro 102 de la base de datos de ECG del MIT-BIH. En este registro (idealmente con HR constante) se introdujo un pico de frecuencia (0.167 Hz) de forma artefactual, debido a un eje no simétrico usado en el sistema de lectura de la cinta magnética, al digitalizar la señal ECG. Este pico espurio y sus armónicos servirán como señal de prueba para el MLO. En este caso la hipótesis de MNU estacionario se satisface correctamente. La figura 1b muestra la PSD de Lomb estimada sobre estos datos. También se muestra en, 1c, la PSD estimada mediante remuestreo a una frecuencia de 2 Hz y estimando la PSD con la clásica FFT. La frecuencia media de muestreo en la serie de HR original es de 1.21 Hz y la desviación es de 31 ms. Analizando el espectro de Lomb se comprueba que aparece la periodicidad predicha con periodo la frecuencia media, 1.21 Hz. Aparecen en el espectro tres picos armónicamente relacionados a frecuencias 0.16, 0.30 y 0.45 Hz que corresponden con el artefacto introducido por el sistema de lectura magnético. Se puede notar, fig. 1b, como estos picos tienen menor amplitud en la segunda banda (0.6 - 1.8 Hz) que en la primera (-0.6 - 0.6 Hz) como resultado el efecto de filtro paso bajo debido al MNU. En fig. 1d se tiene el espectro de Lomb para varios ciclos de la frecuencia media

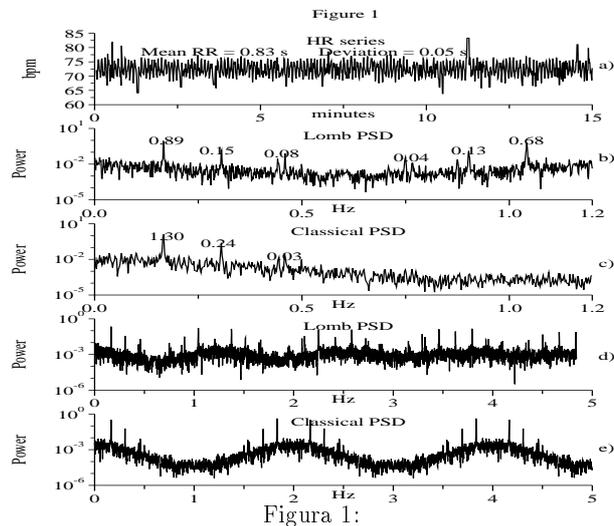


Figura 1:

de muestreo. Se puede corroborar la periodicidad del espectro y el efecto de filtrado paso bajo.

Considerando ahora el espectro obtenido con el remuestreo y la clásica FFT, fig. 1e, se comprueba que el espectro a altas frecuencias se atenúa como resultado del remuestreo. El tercer pico del espectro esta mucho menos marcado que en el caso del espectro de Lomb. Este efecto de filtrado paso bajo introducido por el remuestreo es importante y desaconsejable en estudios de HRV donde se mide el cociente entre la energía en distintas bandas frecuenciales como índice clínico [1]. Esto corrobora que el estudio teórico realizado sobre el MLO se corresponde con la experimentación y que este método es el más aconsejable para estudios de HRV.

V. CONCLUSIONES

Se ha presentado el análisis teórico del método de Lomb para estimación de la PSD en señales muestreadas no uniformemente. Cuando esta no uniformidad se puede modelar como un MU con unas variaciones aleatorias respecto a una media, la PSD de Lomb es periódico (en media), resultando ser un estimador no sesgado de la PSD en la banda base con un efecto de filtrado paso bajo en bandas superiores que depende de la distribución del muestreo. Estos resultados han sido comprobados con señales reales. Una comparación con métodos clásicos ha mostrado la limitación del remuestreo previo a la estimación de la PSD. Respecto a la señales de HR se a visto que el método más adecuado para realizar estudios basados en PSD es el MLO, ya que la relación de potencia en las distintas bandas del espectro se preserva mejor que en los otros métodos, y es relevante en el diagnóstico clínico.

Referencias

- [1] G.A. Myers, G.J. Martin, N.M. Magid, P.S. Barnett, J.W. Schaad, J.S. Weiss, M. Lesch, and D. H. Singer, "Power spectral analysis of heart rate variability in sudden cardiac death: Comparison to other methods", *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 33, no. 12, pp. 1149-1156, 1986.
- [2] G. B. Moody, "Spectral analysis of heart rate without resampling", in *Computers in Cardiology*. IEEE Computer Society Press, 1993, p. IN Press.
- [3] N. R. Lomb, "Least-squares frequency analysis of unequally spaced data", *Astrophysical and Space Science*, vol. 39, pp. 447-462, 1976.
- [4] W. H. Press and G. B. Rybicki, "Fast algorithm for spectral analysis of unevenly sampled data", *Astrophysical J.*, vol. 338, pp. 277-280, 1989.