

DETECTORES BASADOS EN SUBESPACIOS PARA SEÑALES MULTICANAL

Salvador Olmos, Juan Pablo Martínez

Leif Sörnmo

Instituto de Investigación en Ingeniería de Aragón (I3A)
Universidad de Zaragoza

Dep. of Electrosience
Lund University, Sweden

RESUMEN

En este trabajo se propone un detector basados en subespacios para señales multicanal basado en el GLRT de señales modeladas mediante expansiones lineales espacio-temporales separables. Se analiza el caso de ruido gaussiano y coloreado, tanto en la dimensión temporal como espacial. Los resultados de simulación concuerdan con la derivación teórica del detector, mostrando una mejora de prestaciones del detector multicanal frente a detectores aplicados canal a canal, especialmente significativa para valores muy bajos de SNR.

1. INTRODUCCIÓN

El problema de detección de eventos en señales biomédicas es muy frecuente. En la mayoría de los casos no existe un conocimiento exacto de la señal que caracteriza el evento. Para estos casos, la teoría de la detección propone la utilización del GLRT (Generalized Likelihood Ratio Test) [1]. Si se conoce de forma exacta la forma de onda a detectar (excepto una constante de proporcionalidad), el detector GLRT se conoce como filtro adaptado. Sin embargo, la morfología que define los eventos, p. ej. el complejo QRS en el ECG, puede ser muy variada, dependiendo de numerosos factores (anatómicos, fisiológicos, ubicación de electrodos, etc.). En dichos casos se puede suponer con frecuencia que la señal pertenece a un subespacio, es decir, se puede expresar como combinación lineal de varias morfologías. El detector GLRT en ese caso es un detector basado en subespacios [2], y el filtro adaptado es un caso particular para subespacios de rango uno.

Muchas señales bioeléctricas (p.ej. ECG, EEG, BSPM) son multicanal, es decir, se registran mediante un conjunto de electrodos espacialmente distribuidos sobre la superficie del cuerpo. Paradójicamente, la mayoría de los algoritmos de tratamiento de señal están basados en técnicas unidimensionales, bien en la dimensión temporal o bien en la espacial. En este trabajo se analiza el problema de detección de eventos en señales multicanal utilizando la información espacio-temporal de una forma conjunta.

El trabajo se organiza de la siguiente manera. La sección 2 introduce el modelo de señal multicanal basado en

Este trabajo ha sido financiado por los proyectos P075/2001 (CONSID-DGA) y TIC2001-2167-C02-02 (CICYT-FEDER).

expansiones lineales espacio-temporales de rango reducido. El GLRT para este modelo se analiza en la sección 3. Los índices para cuantificar las prestaciones de detección se recogen en la sección 4, mientras que las simulaciones y resultados se presentan en las secciones 5 y 6.

2. MODELO DE SEÑAL MULTICANAL

Las señales multicanal se pueden modelar mediante matrices $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{N \times L}$, siendo N el número de muestras y L el número de sensores. Un modelo de señal muy utilizado es el de expansiones lineales, donde la señal \mathbf{D} se descompone como una combinación lineal de $N \times L$ funciones espacio-temporales linealmente independientes (matrices elementales)

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^L w_{ij} \mathbf{B}_{ij}. \quad (1)$$

Los coeficientes w_{ij} representan la contribución de cada función \mathbf{B}_{ij} en la señal. Cada \mathbf{B}_{ij} aporta las características espacio-temporales de la señal.

Con el fin de reducir la complejidad en el caso de señales multidimensionales, frecuentemente se asume que las funciones base \mathbf{B}_{ij} son separables, es decir, matrices de rango uno

$$\mathbf{B}_{ij} = \mathbf{t}_i \mathbf{s}_j^T, \quad (2)$$

donde los vectores temporales \mathbf{t}_i y espaciales \mathbf{s}_j son las columnas i -ésimas y j -ésimas de dos matrices denotadas respectivamente \mathbf{T} y \mathbf{S} . La única restricción para estas matrices es que deben ser de rango completo. Entonces las expansiones lineales (1) se pueden escribir como

$$\mathbf{D} = \mathbf{T} \mathbf{W} \mathbf{S}^T, \quad (3)$$

donde la matrix $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ contiene la información temporal de las funciones base, \mathbf{W} es la matriz formada por los coeficientes w_{ij} , y $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{L \times L}$ contiene la información espacial. El caso particular de expansiones lineales canal a canal se puede obtener de (3) haciendo $\mathbf{S} = \mathbf{I}$. Debe notarse que incluso en el caso de que las características espacio-temporales de la señal no sean separables, la ec. (3) denota una representación válida para toda señal.

En varias aplicaciones, como compresión de datos, selección de características o filtrado, es necesario utilizar expansiones lineales truncadas o de rango reducido, que

se pueden interpretar como la proyección de la señal en un subespacio. El truncado en el modelo lineal (3) se consigue seleccionando $p < N$ funciones base de la matriz \mathbf{T} y/o $q < L$ funciones base de la matriz \mathbf{S} , siendo el modelo resultante $\mathbf{D} = \mathbf{T}_p \mathbf{W} \mathbf{S}_q^T$, donde las columnas de \mathbf{T}_p y \mathbf{S}_q contienen las funciones base que definen el subespacio de señal. Los subíndices p y q se omitirán en el resto del trabajo para simplificar la notación.

3. GLRT PARA SEÑALES MULTICANAL

El modelo lineal separable para una señal multicanal $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{N \times L}$ en ruido se puede escribir como

$$\mathbf{X} = \mathbf{D} + \mathbf{N} = \mathbf{TWS}^T + \mathbf{N} \quad (4)$$

donde $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{N \times p}$ y $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{L \times q}$ definen el subespacio de señal, y \mathbf{N} es un ruido de observación multicanal. Se hace la hipótesis que la señal a detectar pertenece al subespacio de señal engendrado por $\{\mathbf{T}, \mathbf{S}\}$.

El ruido se asume gaussiano y de media nula. En muchos trabajos se utiliza la hipótesis de ruido incorrelado; sin embargo, el ruido presente en las señales biomédicas (p.ej. ruido EMG o artefactos de movimiento) contiene correlación espacial, al menos entre los canales con electrodos cercanos. El momento de segundo orden del ruido multicanal se describe en general como un tensor de cuarto orden. Una simplificación muy común es suponer que la función de covarianza es separable

$$E\{n_{ij} n_{kl}\} = \sigma^2 c_t(i, k) c_s(j, l), \quad (5)$$

donde σ^2 denota la varianza del ruido, $c_t(i, k)$ la correlación temporal normalizada entre los instantes i y k , y $c_s(j, l)$ la correlación espacial normalizada entre los canales j y l . Entonces, la matriz $NL \times NL$ de covarianza equivalente se puede escribir como

$$\mathbf{C} = E\{\text{vec}(\mathbf{N}) \text{vec}(\mathbf{N})^T\} = \sigma^2 (\mathbf{C}_s \otimes \mathbf{C}_t) \quad (6)$$

donde $\text{vec}(\mathbf{N})$ es el vector columna $NL \times 1$ formado con todas las muestras de \mathbf{N} ordenadas por columnas, \otimes denota el producto de Kronecker, \mathbf{C}_t es la matriz de covarianza temporal normalizada y \mathbf{C}_s la matriz de covarianza espacial normalizada.

El test de hipótesis a resolver es

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 : \mathbf{W} &= \mathbf{0} \\ \mathcal{H}_1 : \mathbf{W} &\neq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7)$$

El GLRT decide entre \mathcal{H}_0 y \mathcal{H}_1 dependiendo de

$$L_G(\mathbf{X}) = \frac{p(\mathbf{X}; \hat{\mathbf{W}}_1)}{p(\mathbf{X}; \mathbf{W} = \mathbf{0})} \stackrel{?}{\geq} \gamma, \quad (8)$$

donde $\hat{\mathbf{W}}_1$ es la estimación de máxima de verosimilitud de \mathbf{W} bajo la hipótesis \mathcal{H}_1 .

La pdf de \mathbf{X} se puede escribir como

$$p(\mathbf{X}; \mathbf{W}) = p(\text{vec}(\mathbf{X}; \mathbf{W})) = \frac{\exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2} [\text{vec}(\mathbf{X} - \mathbf{TWS}^T)]^T \mathbf{C}^{-1} [\text{vec}(\mathbf{X} - \mathbf{TWS}^T)]\right)}{(2\pi\sigma^2)^{NL/2} \det^{1/2} \mathbf{C}} \quad (9)$$

Usando las propiedades de la inversa y del determinante del producto de Kronecker de matrices,

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}_s^{-1} \otimes \mathbf{C}_t^{-1} \quad \text{y} \quad \det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}_s)^N \det(\mathbf{C}_t)^L, \quad (10)$$

la pdf (9) se puede escribir como

$$p(\mathbf{X}; \mathbf{W}) = \frac{\exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2} \text{tr}\left\{(\mathbf{X} - \mathbf{TWS}^T) \mathbf{C}_s^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{TWS}^T)^T \mathbf{C}_t^{-1}\right\}\right)}{(2\pi\sigma^2)^{NL/2} \det(\mathbf{C}_s)^{N/2} \det(\mathbf{C}_t)^{L/2}} \quad (11)$$

La estimación de máxima verosimilitud (ML) de la matriz de coeficientes bajo \mathcal{H}_1 se obtiene como

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{W}}_1 &= \arg \max_{\mathbf{W}} \{p(\mathbf{X}; \mathbf{W})\} \\ &= (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_t^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_t^{-1} \mathbf{X} \mathbf{C}_s^{-1} \mathbf{S} (\mathbf{S}^T \mathbf{C}_s^{-1} \mathbf{S})^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

Por tanto, $\hat{\mathbf{D}}_1 = \mathbf{T} \hat{\mathbf{W}}_1 \mathbf{S}^T$ es el estimador ML de la señal bajo \mathcal{H}_1 , y es una proyección oblicua de \mathbf{X} sobre el subespacio definido por \mathbf{T} y \mathbf{S} . Si se usa la métrica definida por el producto escalar ponderado

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle_{\mathbf{C}_s, \mathbf{C}_t} = \text{tr}\{\mathbf{A} \mathbf{C}_s^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_t^{-1}\}, \quad (13)$$

$\hat{\mathbf{D}}_1$ es entonces la proyección ortogonal de \mathbf{X} .

Usando (8), (11), (12) y (13), el GLRT se puede escribir como

$$\begin{aligned} T(\mathbf{X}) &= 2 \log L_G(\mathbf{X}) \\ &= \frac{\langle \mathbf{X}, \mathbf{X}^T \rangle_{\mathbf{C}_s, \mathbf{C}_t} - \langle \mathbf{X} - \hat{\mathbf{D}}_1, \mathbf{X} - \hat{\mathbf{D}}_1 \rangle_{\mathbf{C}_s, \mathbf{C}_t}}{\sigma^2} \\ &= \frac{\langle \hat{\mathbf{D}}_1, \mathbf{X} \rangle_{\mathbf{C}_s, \mathbf{C}_t}}{\sigma^2} = \frac{\langle \hat{\mathbf{D}}_1, \hat{\mathbf{D}}_1 \rangle_{\mathbf{C}_s, \mathbf{C}_t}}{\sigma^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

El test estadístico (14) se puede interpretar de dos formas alternativas: como un detector estimador-correlador, pero usando la métrica en (13) (ver Fig. 1), y como el cociente de la norma de la señal proyectada en el subespacio y la potencia media de ruido. La Tabla 1 recoge las expresiones del estadístico GLRT $T(\mathbf{X})$ para varios casos particulares, incluyendo ruido correlado/incorrelado y transformación unitarias/no-unitarias.

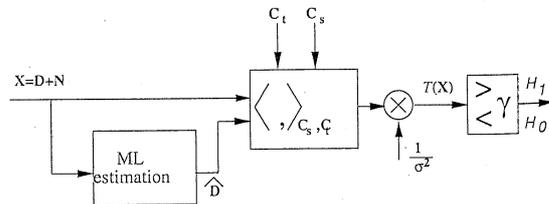


Figura 1. Diagrama de bloques del GLRT como detector estimador-correlador.

Se puede dar una interpretación alternativa del detector si \mathbf{C}_t^{-1} y \mathbf{C}_s^{-1} se descomponen como:

$$\mathbf{C}_t^{-1} = \mathbf{H}_t^T \mathbf{H}_t \quad \mathbf{C}_s^{-1} = \mathbf{H}_s^T \mathbf{H}_s. \quad (15)$$

Ruido

Ruido

Se puede utilizar \mathbf{H}_t

donde \mathbf{T}^T trar que \mathbf{N} $\sigma^2 \delta_{ij} \delta_{kl}$ estructura porque el i ción se ref

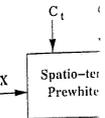


Figura 2. tector estil

El test

$T(\mathbf{X})$

que tambi tivas: cor preblanqu señal proy Usand bos tests e

$T(\mathbf{X})$

4.

Dada una hipótesis que $T(\mathbf{X})$ independ de $T(\mathbf{X})$ de centra

	T y S unitarias	T y S no-unitarias
Ruido coloreado	$T(\mathbf{X}) = \frac{\text{tr} \left\{ \mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_t^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_t^{-1} \mathbf{X} \mathbf{C}_s^{-1} \mathbf{S} (\mathbf{S}^T \mathbf{C}_s^{-1} \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{C}_s^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{C}_t^{-1} \right\}}{\sigma^2}$	
Ruido incorrelado	$T(\mathbf{X}) = \frac{\text{tr} \left\{ \mathbf{T} \mathbf{T}^T \mathbf{X} \mathbf{S} \mathbf{S}^T \mathbf{X}^T \right\}}{\sigma^2}$	$T(\mathbf{X}) = \frac{\text{tr} \left\{ \mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{X} \mathbf{S} (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{X}^T \right\}}{\sigma^2}$

Tabla 1. GLRT para varios tipos de ruido y subespacios de señal.

Se puede definir una señal observada modificada \mathbf{X}' utilizando \mathbf{H}_t y \mathbf{H}_s como matrices de filtrado

$$\mathbf{X}' = \mathbf{H}_t \mathbf{X} \mathbf{H}_s^T = \mathbf{T}' \mathbf{W} \mathbf{S}'^T + \mathbf{N}', \quad (16)$$

donde $\mathbf{T}' = \mathbf{H}_t \mathbf{T}$ y $\mathbf{S}' = \mathbf{H}_s \mathbf{S}$. Es sencillo demostrar que $\mathbf{N}' = \mathbf{H}_t \mathbf{N} \mathbf{H}_s^T$ es incorrelado ($E\{n'_{ik} n'_{jl}\} = \sigma^2 \delta_{ij} \delta_{kl}$). Después de un preblanqueado del ruido, la estructura del detector se puede simplificar notablemente porque el ruido es incorrelado (ver Table 1). Esta realización se representa en la Fig. 2.

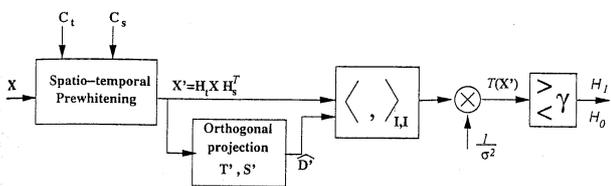


Figura 2. Diagrama de bloques del GLRT como un detector estimador-correlador con ruido preblanqueado.

El test estadístico (14) para la señal preblanqueada es

$$T(\mathbf{X}') = \frac{\langle \widehat{\mathbf{D}}_1, \mathbf{X}' \rangle_{I,I}}{\sigma^2} = \frac{\langle \widehat{\mathbf{D}}_1, \widehat{\mathbf{D}}_1 \rangle_{I,I}}{\sigma^2}, \quad (17)$$

que también se puede interpretar de dos maneras alternativas: como un detector estimador correlador con ruido preblanqueado y como el cociente entre la energía de la señal proyectada y la potencia media de ruido.

Usando (13), (15) y (16) se puede demostrar que ambos tests estadísticos (14) y (17) son idénticos

$$T(\mathbf{X}) = \frac{\text{tr} \left\{ \widehat{\mathbf{D}}_1 \mathbf{C}_s^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{C}_t^{-1} \right\}}{\sigma^2} = \frac{\text{tr} \left\{ \mathbf{H}_t \widehat{\mathbf{D}}_1 \mathbf{H}_s^T \mathbf{H}_s \mathbf{X}^T \mathbf{H}_t^T \right\}}{\sigma^2} = T(\mathbf{X}'). \quad (18)$$

4. PRESTACIONES DE DETECCIÓN

Dada una señal \mathbf{D} , la pdf del test estadístico $T(\mathbf{X})$ bajo la hipótesis \mathcal{H}_0 , $T(\mathbf{X}; \mathcal{H}_0)$, se distribuye como una χ_{pq}^2 ya que $T(\mathbf{X})$ es una suma $p \times q$ variables aleatorias gaussianas independientes y de media nula. De forma análoga, la pdf de $T(\mathbf{X}; \mathcal{H}_1)$ es una distribución $\chi_{pq}^2(\lambda)$ con parámetro de centralidad

$$\lambda = \frac{\langle \mathbf{D}, \mathbf{D} \rangle_{\mathbf{C}_s, \mathbf{C}_t}}{\sigma^2} = \frac{\langle \mathbf{D}', \mathbf{D}' \rangle_{I,I}}{\sigma^2}. \quad (19)$$

A partir de las distribuciones del GLRT bajo ambas hipótesis, se pueden obtener de forma directa las probabilidades de detección P_D y de falsa alarma P_{FA} para valores diferentes del umbral γ , es decir, las curvas ROC.

Un índice comúnmente utilizado para evaluar las prestaciones de detección es la distancia entre las distribuciones

$$d = \frac{|E\{T(\mathbf{X}); \mathcal{H}_1\} - E\{T(\mathbf{X}); \mathcal{H}_0\}|}{\sqrt{0.5 [\text{var}(T(\mathbf{X}); \mathcal{H}_0) + \text{var}(T(\mathbf{X}); \mathcal{H}_1)]}} \quad (20)$$

que se puede calcular utilizando las propiedades de las distribuciones mencionadas anteriormente

$$d = \frac{pq + \lambda - pq}{\sqrt{0.5 [2pq + 2pq + 4\lambda]}} = \frac{\lambda}{\sqrt{2pq + 2\lambda}}. \quad (21)$$

Para una dimensionalidad del subespacio dada, $\{p, q\}$, las prestaciones dependen únicamente de λ , que es la relación señal a ruido de la señal una vez preblanqueada. Debe notarse que señales con el mismo valor original de SNR pueden tener diferente energía después del preblanqueado, y por tanto diferentes prestaciones de detección.

5. SIMULACIÓN

Para validar los resultados teóricos previos se diseña una simulación de Monte Carlo. Se utilizan complejos QRS extraídos de 114 registros ECG de reposo de 12 derivaciones, frecuencia de muestreo 1000 Hz, y duración de 5 minutos. El subespacio de señal se obtuvo calculando la transformada de KL temporal y espacial del total de pacientes (un total de 37000 latidos). Se escogió la transformada de KL porque proporciona un empaquetamiento óptimo de la energía del training set en el mínimo número de funciones base, y parece una elección razonable para el problema de detección. El subespacio de señal se definió seleccionando las primeras $p = 5$ y las $q = 2$ funciones base.

Las realizaciones de señal limpias fueron simuladas considerando los elementos de \mathbf{W} , w_{ij} como variables aleatorias gaussianas e independientes con media nula y varianza $\sigma_{w_{ij}} = \lambda_i \pi_j$, siendo λ_i y π_j los autovalores asociados con t_i and s_j respectivamente. Para cada realización de \mathbf{W} , se calculó una señal limpia como $\mathbf{D} = \mathbf{T} \mathbf{W} \mathbf{S}^T$.

Las matrices de covarianza temporales y espaciales del ruido \mathbf{C}_s y \mathbf{C}_t se estimaron durante intervalos isoeletricos del ECG, como el intervalo TP. Las realizaciones de

ruido coloreado se calcularon como $N = H_t^{-1} V H_s^{-1T}$, donde V es un ruido simulado gaussiano e incorrelado.

Se compararon cuatro detectores diferentes: el filtro adaptado (MFD), como detector de referencia inalcanzable, el detector basados en subespacios espacio-temporales (ST-SD) en (14), el detector mediante subespacios temporal (o canal a canal) y el detector de energía (ED). Los dos últimos detectores se pueden interpretar como un caso particular del detector ST-SD haciendo $S = I$ para T-SD, y $S = I$, $T = I$ para ED.

6. RESULTADOS

En primer lugar se realiza una simulación de Monte Carlo sobre una señal simulada D con 3000 realizaciones de ruido. Las prestaciones se muestran en la Figura 3 con curvas ROC para varios valores de SNR.

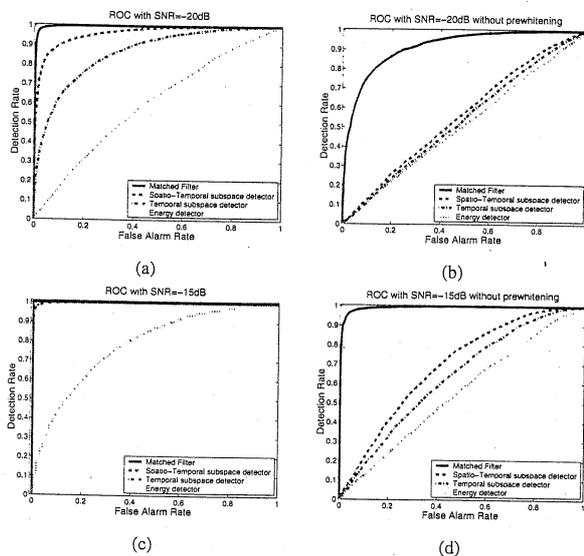


Figura 3. Curvas ROC para los 4 detectores.

Se puede apreciar en la Figura 3(a) que ST-SD supera claramente a T-SD para SNR=-20 dB, con unas prestaciones próximas al filtro adaptado, que es irrealizable. Para SNR=-15 dB, todos los detectores mejoran sus prestaciones. Por otro lado, si se comparan las figuras (b) y (d) con (a) y (c), se observa una clara degradación para todos los detectores cuando en el diseño se realiza la hipótesis de ruido blanco y no se utiliza preblanqueado. Estos resultados resaltan la importancia de incluir la estadística del ruido para obtener unas buenas prestaciones.

La Figura 4 muestra la distancia entre densidades d teórica y experimental para los detectores analizados. Los resultados experimentales reproducen los valores teóricos muy fidedignamente. Cuando la SNR es elevada, las prestaciones de ST-SD, T-SD y E-D es similar. Para valores muy bajos de SNR, ST-SD es el que presenta unas prestaciones más robustas.

En la segunda simulación se consideran 50 morfologías de QRS diferentes con el objeto de obtener un resultado más general. A cada señal simulada se suman

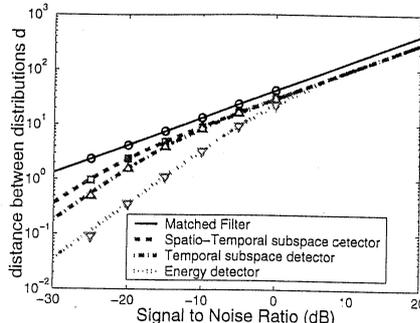


Figura 4. Distancia entre densidades versus SNR.

500 realizaciones de ruido. La Figura 5 muestra las curvas ROC calculadas en el conjunto total de simulaciones, mostrando un comportamiento similar al mostrado en la Figura 3

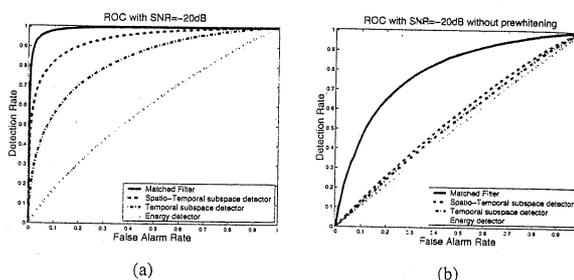


Figura 5. Curvas ROC sobre 50 morfologías de señal.

7. CONCLUSIONES

En este trabajo se analiza un detector basados en subespacios para señales multicanal contaminadas por ruido coloreado con matrices de covarianza espacial y temporal conocidas. Se demuestra que sus prestaciones mejoran a las de los detectores de un único canal, o detectores que únicamente utilizan la información temporal, especialmente para valores muy bajos de SNR.

Cuando el detector se diseña bajo la hipótesis de ruido blanco, sus prestaciones se degradan notablemente, haciéndolo prácticamente inservible cuando se evalúa con ruido coloreado simulado a partir de estadísticas de señales reales. En aplicaciones reales, la matriz de covarianza no se conoce a priori y es necesaria estimarla. El efecto del error en la estimación de la matriz de covarianza del ruido no se analiza en este trabajo, y se debería considerar en trabajos futuros. De manera análoga, tampoco se han analizado la selección del subespacio de señal así como su dimensionalidad $\{p, q\}$.

8. BIBLIOGRAFÍA

- [1] S.M. Kay, *Fundamentals of statistical signal processing*, vol. II-Detection theory, Prentice-Hall, 1998.
- [2] Louis L. Scharf, "Matched subspace detectors," *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 42, no. 8, pp. 2146-2157, August 1994.

La
dia,
tan
auto
par
mir
pie
dar
pul
par
latic
Par
pre
inve
ace
car
con
vali
frec

El a
perr
incl
no i
que
dura
hosp
ello
y a
las
QRS

Sin
cons
med,
añad
piel,
En s
uso
pued