

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

FACULTAD DE CIENCIAS

**NUEVAS TÉCNICAS DE PROCESADO DE SEÑALES
ELECTROCARDIOGRÁFICAS: APLICACIÓN
A REGISTROS DE LARGA DURACIÓN.**

Tesis Doctoral

Pablo Laguna Lasaosa

Instituto de Cibernética
(Universidad Politécnica de Cataluña - CSIC)

Octubre 1990

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

A Aurora, Pablo, Nati y David

Agradecimientos

El trabajo que se presenta en esta tesis doctoral nació y se ha desarrollado en el marco de un proyecto de investigación subvencionado por la CICYT y del convenio de colaboración existente entre el Instituto de Cibernética y el Hospital de la Santa Cruz y San Pablo. Sin este soporte y el del Instituto de Cibernética, donde se ha desarrollado en su mayor parte este trabajo, no habría sido posible su realización.

Numerosas son las personas que de una u otra forma han colaborado en la realización de esta tesis. Me gustaría en estas líneas expresar mi sincero agradecimiento a todas ellas, sin que éste, en modo alguno, resulte para mi un tópico obligado. En particular quiero expresar mi agradecimiento:

A Pere Caminal, profesor titular de la Universidad Politécnica de Cataluña, que ha dirigido con gran entusiasmo esta tesis. Quiero agradecerle especialmente el haberme introducido en el campo del procesado de señales biológicas, los medios puestos a mi alcance para profundizar en él, sus palabras de ánimo y la paciencia, esmero y tiempo dedicados a la revisión de este texto.

A Pedro Martínez, catedrático de la Universidad de Zaragoza, por haber aceptado la codirección de esta tesis a fin de agilizar y facilitar los siempre complejos trámites administrativos en su presentación, así como por tener la amabilidad de revisar exhaustivamente este texto.

A Luis Basañez, catedrático de la Universidad Politécnica de Cataluña y director del Instituto de Cibernética en el momento de mi incorporación a él, por haber puesto a mi disposición los medios técnicos del Instituto para el desarrollo de este trabajo.

A Nitish Thakor, "Associate professor" del "Department of Biomedical Engineering" de la "Johns Hopkins University", en cuyo laboratorio realicé una estancia financiada por la CIRIT (Generalitat de Catalunya) y me introduje en el campo del procesado adaptativo de señales.

A Hervé Rix, "professeur" de la "Université de Nice" e investigador del "Laboratoire de Signaux et Systèmes" de dicha universidad, en donde también realicé una estancia financiada por el Ministerio de Educación y Ciencia, que me permitió conocer a fondo la problemática de los estimadores de tiempo de retardo.

A Antonio Bayés, catedrático de la Universidad Autónoma de Barcelona y jefe del

Departamento de Electrocardiografía del Hospital de la Santa Cruz y San Pablo, por su entusiasmo e infatigable empuje, especialmente en la parte de medida automática del intervalo QT.

A Raimon Jané, investigador del Instituto de Cibernética, por sus siempre prudentes y enriquecedores comentarios y discusiones sobre este trabajo, así como por dedicar parte de su tiempo para revisar este texto, brindándome en todo momento su amistad.

A Hyung-Ro Yoon y Yang Min, investigadores de la Universidad Johns Hopkins, y a Eric Thierry y Olivier Meste, investigadores de la Universidad de Niza, por sus apasionadas discusiones y sugerencias en distintas partes de este trabajo, así como por sus desinteresados gestos de amabilidad durante mis estancias en sus laboratorios.

A Vicens Martí, médico residente del Hospital de la Santa Cruz y San Pablo, por su colaboración en la validación con medidas manuales del sistema de medida automática del intervalo QT, y a José María Domínguez, adjunto responsable de la Unidad Coronaria del mismo hospital, por su soporte en el registro de las señales ECG.

A Alfonso Carlosena, amigo personal, por haber realizado las gestiones oportunas para la presentación de esta tesis en la Universidad de Zaragoza con el mismo interés que si de la suya se tratase.

A todos los miembros del Instituto, por sus siempre agradables “*que, ¿como va la tesis?*”, así como por los múltiples ofrecimientos a “ *echar una mano*”, sobre todo en la “*recta final*”.

A Nacho, mi hermano, quien posiblemente mejor ha sabido encontrar los momentos en que más se agradece un “*ánimo*”, y a todos los que en algún momento han tenido unas desinteresadas palabras de aliento.

Finalmente, y muy especialmente, quiero agradecer a mis padres, Aurora y Pablo, quienes en su día, y con un alto coste material y humano para ellos, tomaron la decisión de poner las bases para que este trabajo pudiera realizarse. A ellos y a mis tíos, Nati y David, mi más sincero agradecimiento por dedicar una buena parte de su vida a conseguir que yo tuviera ésta u otras oportunidades, confiando siempre en mí sin expresarme la menor reticencia a mis decisiones y apoyándome en todo momento. Sin duda es para ellos mayor motivo de satisfacción de lo que lo es para mí, que esta tesis llegue a su fin , y puedo asegurar que para mí lo es mucho. A los cuatro, muchas gracias.

RESUMEN DE LA TESIS DOCTORAL

*“NUEVAS TÉCNICAS DE PROCESADO DE SEÑALES
ELECTROCARDIOGRÁFICAS:
APLICACIÓN A REGISTROS DE LARGA DURACIÓN.”*

Realizada por: Pablo Laguna Lasasa

Dirigida por: Pere Caminal Magrans

Pedro Antonio Martínez Martínez

La señal electrocardiográfica (ECG) representa la actividad eléctrica del corazón registrada en la superficie del cuerpo. El análisis de esta señal, registrada de forma no invasiva, es la forma más común de estudiar y diagnosticar cardiopatías, dada la estrecha vinculación existente entre el ECG y la actividad del corazón. A este campo de trabajo concerniente con la señal ECG se le conoce con el nombre de Electrocardiografía. La Bioingeniería se ha ocupado de desarrollar técnicas de adquisición, monitorización, procesado y análisis de la señal ECG.

En el presente trabajo se presenta una aportación para la determinación y medida de algunos de los puntos significativos del ECG, que posteriormente permiten medir distancias temporales entre los eventos fisiológicos que representan, o realizar posteriores procesados que toman como referencia estos puntos. Para ello se consideran técnicas de filtrado lineal y adaptativo para facilitar la medida de los puntos antes mencionados y mejorar la SNR del ECG. En el caso del filtrado adaptativo se consideran otras aplicaciones de interés como es el seguimiento dinámico de la señal ECG vinculada al impulso que desencadena al latido cardiaco, y que puede presentar variaciones de un latido a otro.

En el primer capítulo se hace una presentación de las características de la señal ECG, así como de la problemática que conlleva el procesado de esta señal.

En el capítulo segundo se considera la aplicación de filtros derivadores paso bajo. Estos filtros presentan un gran interés, ya que la derivada de la señal proporciona valiosa información sobre los puntos significativos de ésta. Sin embargo, a altas frecuencias tienen una ganancia elevada que puede amplificar excesivamente el ruido, y por tanto es de gran interés que presenten un comportamiento paso bajo. En este capítulo se propone un criterio de diseño de estos filtros basado en el espectro de la señal ECG y

del ruido.

En el tercer capítulo se presenta un detector de QRS desarrollado específicamente para medir el intervalo QT en registros de Holter. Una vez definida la posición de cada latido cardíaco se considera la definición del intervalo QT. Para ello se propone una técnica de definición de inicios y finales de las ondas del ECG, y en particular del inicio de la onda Q y del final de la onda T como puntos límite del intervalo QT. Los resultados obtenidos por este método son validados con medidas manuales realizadas por un experto, obteniéndose una precisión comparable en ambos casos. También se presenta otro detector de QRS más robusto, que opcionalmente incorpora una selección de latidos, de modo que son rechazados aquellos especialmente ruidosos o ectópicos.

En el capítulo cuarto, y con el método desarrollado previamente para medir automáticamente el intervalo QT, se realiza un estudio sobre la validez de este intervalo para estratificar pacientes con postinfarto de miocardio, que tienen mayor tendencia a desarrollar arritmias ventriculares malignas, respecto a los que no presentan esta tendencia.

En el capítulo quinto se considera un estimador de tiempo de retardo entre señales transitorias repetitivas. Ello permite definir los puntos de ocurrencia de las distintas ondas del ECG. En este capítulo se realiza un estudio teórico, validado en simulación, del efecto del ruido sobre la estimación. Por último se propone un método basado en este estimador para la estimación precisa de la distancia entre las distintas ondas del ECG.

El capítulo sexto está dedicado al estudio de procesados no lineales para el caso en que las interferencias del ECG (ruido) presenten un espectro solapado con el del ECG. Dado que la señal ECG presenta un comportamiento transitorio recurrente, se propone un esquema adaptativo general para procesado de este tipo de señales, supuesto que se conozca el instante de recurrencia de la señal. Este esquema se aplica para filtrar adaptativamente cada onda del ECG, de modo que elimine el ruido no correlado con cada recurrencia y por tanto desligado de la actividad cardíaca. En concreto, se propone su particularización para el filtrado de las ondas del ECG aplicado a la detección de potenciales tardíos en señales ECG de alta resolución. También se propone, con el mismo esquema, un modelado adaptativo de los complejos QRS, lo cual permite monitorizar sus variaciones temporales, y clasificarlos según su forma.

Índice

1	INTRODUCCIÓN	1
1.1	La señal electrocardiográfica	4
1.1.1	Origen fisiológico	4
1.1.2	Electrodos	5
1.1.3	Derivaciones	6
1.1.4	Adquisición de la señal ECG	8
1.1.5	Caracterización de la señal ECG	11
1.1.6	Patologías asociadas con el ECG	15
1.1.7	Etapas básicas del procesado del ECG	16
1.2	Objetivos de la tesis	17
2	FILTROS DERIVADORES PARA SEÑALES BIOLÓGICAS	21
2.1	Introducción	21
2.2	Diseño del filtros LPD para señales de espectro conocido	24
2.2.1	Diseño de LPD para identificación de la morfología	27
2.2.2	Diseño de LPD para mejorar la relación señal-ruido	31
2.2.3	Selección y aproximación entera de los coeficientes del LPD	32

2.3	Aplicaciones a la señal ECG	33
2.3.1	Identificación de la morfología del QRS	38
2.3.2	Identificación de la morfología de las ondas P y T	43
2.3.3	Detección del complejo QRS	46
2.3.4	Detección de ondas P y T	49
2.3.5	Enfatizado de las ondas P y T respecto del QRS	52
2.4	Extensión al diseño de otros filtros	56
2.4.1	Diseño de filtros paso bajo	56
2.4.2	Diseño de filtros paso alto	58
2.5	Conclusiones	59
3	DEFINICIÓN DE PUNTOS SIGNIFICATIVOS DEL ECG	61
3.1	Introducción	61
3.2	Detección de complejos QRS en el ECG	63
3.2.1	Esquema básico de un detector no sintáctico	65
3.2.2	Detector específico de QRS para definición del intervalo QT	68
3.3	Definición del intervalo QT y QTP	76
3.3.1	Definición de las ondas R y Q	82
3.3.2	Definición del inicio del QRS	85
3.3.3	Definición del pico y final de la onda T	88
3.3.4	Selección de valores de QT	90
3.3.5	Validación	92
3.3.6	Ejemplos de aplicación	94
3.3.7	Generalización a otros intervalos	97

3.4	Detector de QRS con selección de latidos	100
3.4.1	Preprocesado	101
3.4.2	Regla de decisión	105
3.4.3	Selección de latidos	106
3.4.4	Ejemplos de aplicación	108
3.5	Conclusiones	112
4	MEDIDA AUTOMÁTICA DEL INTERVALO QT	115
4.1	Introducción	115
4.2	Parámetros indicadores de muerte súbita	117
4.2.1	El intervalo QT	118
4.2.2	Variabilidad del ritmo cardíaco (HRV)	120
4.3	Planteamiento del estudio	121
4.3.1	Selección de pacientes	121
4.3.2	Sistema de adquisición de la señal	122
4.3.3	Medidas consideradas	123
4.4	Análisis de resultados	123
4.4.1	Diferencias entre promedios: La prueba de la <i>t</i> de Student . . .	124
4.4.2	Los intervalos QT_c y QTP_c	126
4.4.3	El intervalo (QT-QTP)	135
4.4.4	Variabilidad del ritmo cardíaco	138
4.5	Discusión y conclusiones	140
5	DETECCIÓN DE INSTANTES DE OCURRENCIA EN EL ECG	143

5.1	Introducción	143
5.2	Detección de instantes de ocurrencia (WOT)	145
5.2.1	Conceptos básicos	145
5.2.2	Métodos de estimación de WOT en señales ECG	147
5.3	Método de las integrales normalizadas en coincidencia	148
5.3.1	Descripción del método de estimación	148
5.3.2	Estimador \hat{D}_s	152
5.3.3	Estimador \hat{D}_{s^2}	157
5.3.4	Estimador corregido \hat{D}'_{s^2}	164
5.3.5	Simulación	166
5.4	Aplicación a la estimación de la SNR	174
5.5	Aplicación a la medida de intervalos latido a latido en el ECG	175
5.5.1	Descripción del método de medida de intervalos temporales	177
5.5.2	Resultados sobre pacientes	181
5.6	Conclusiones	187
6	PROCESADO ADAPTATIVO DE LA SEÑAL ECG	189
6.1	Introducción	189
6.1.1	Planteamiento del procesado adaptativo	191
6.2	Estructura lineal adaptativa para procesado de señales	193
6.2.1	Gradiente y error cuadrático medio ξ	195
6.2.2	Efecto del ruido en el vector de pesos. El desajuste M	196
6.2.3	Algoritmo de mínimo error cuadrático medio (LMS)	197
6.3	Caracterización adaptativa de señales mediante una base ortonormal	201

6.3.1	Caracterización de señales mediante una base ortonormal	201
6.3.2	Planteamiento del procesado adaptativo	204
6.3.3	La base ortonormal como entrada de referencia	205
6.3.4	Expresiones de adaptación con una base ortonormal	206
6.3.5	Efecto de los errores en el punto de sincronismo	209
6.3.6	Mejora de la relación señal-ruido (SNR)	211
6.4	Estimación adaptativa del complejo QRS con las funciones de Hermite	219
6.4.1	El modelo de Hermite	220
6.4.2	El esquema adaptativo con el modelo de Hermite	222
6.4.3	Convergencia del parámetro b	225
6.4.4	Aplicaciones a complejos QRS reales	230
6.5	Filtrado adaptativo de señales unidas a un impulso (ECG)	241
6.5.1	El filtro adaptativo	242
6.5.2	El filtro adaptativo como promediado ponderado	244
6.5.3	Aplicación al ECG de alta resolución	248
6.5.4	Otras aplicaciones	255
6.6	Conclusiones	256
7	CONCLUSIONES	259
7.1	Aportaciones de la tesis	260
7.2	Extensiones futuras	263
	REFERENCIAS	267

Lista de Figuras

1.1	<i>Derivaciones bipolares del triángulo de Einthoven correspondientes al plano frontal (Reproducido de Webster (1988)).</i>	6
1.2	<i>Derivaciones precordiales (Reproducido de Webster (1988)).</i>	7
1.3	<i>Derivaciones ortogonales X, Y, Z, con la red de resistencias necesaria para su cálculo (Reproducido de Webster (1988)).</i>	8
1.4	<i>Señal ECG ideal correspondiente a un latido cardiaco con la indicación de las ondas, intervalos y segmentos clásicos.</i>	12
1.5	<i>Espectro del ECG y sus componentes (Reproducido de Thakor y otros (1984b)).</i>	14
2.1	<i>Respuesta frecuencial del filtro LPD ideal para un parámetro de corte a arbitrario ($0 < a < 1$).</i>	24
2.2	<i>Aproximación lineal del espectro del ECG según Thakor y otros (1984b).</i>	35
2.3	<i>Señales temporales recuperadas a partir de los espectros de la figura 2.2.</i>	37
2.4	<i>Respuesta frecuencial para los filtros $QRS-M_i(\omega)$ ($i = 1, 2$ y 3), el derivador ideal $H(\omega)$ para QRS, y el espectro aproximado $QRS(\omega)$, del QRS.</i>	39
2.5	<i>Aplicación de los filtros $QRS-M_i$ sobre un registro de ECG real.</i>	40
2.6	<i>Error mínimo $E_m(a)$ (configuración simétrica) para QRS.</i>	41

2.7	<i>Error mínimo $E_m(a)$ (configuración antisimétrica) para QRS.</i>	42
2.8	<i>Respuesta frecuencial para el espectro aproximado de las ondas P y T, $PT(\omega)$, el derivador ideal $H(\omega)$ para ondas P y T y los filtros $PT-M_i(\omega)$ ($i = 1, 2$ y 3).</i>	44
2.9	<i>Aplicación de los filtros $PT-M_i$ sobre un registro de ECG real.</i>	45
2.10	<i>Respuesta frecuencial para los filtros $QRS-D_i(\omega)$ ($i = 1, 2$ y 3), el derivador ideal $H(\omega)$ para QRS, y el espectro aproximado $QRS(\omega)$ del QRS.</i>	47
2.11	<i>Aplicación de los filtros $QRS-D_i$ sobre un registro de ECG real</i>	48
2.12	<i>Espectro aproximado $PT(\omega)$, respuesta frecuencial para el derivador ideal $H(\omega)$ para ondas P y T, y para los filtros $PT-D_i(\omega)$ ($i = 1, 2$ y 3).</i>	50
2.13	<i>Aplicación de los filtros $PT-D_i$ sobre un registro de ECG real</i>	51
2.14	<i>Respuesta frecuencial para los filtros $PT-QRS_i(\omega)$ ($i = 1, 2$ y 3), y los espectros aproximados de la onda P y T $PT(\omega)$, así como del complejo QRS $QRS(\omega)$.</i>	53
2.15	<i>Aplicación de los filtros $PT-QRS_i$ sobre un registro de ECG real.</i>	54
2.16	<i>Respuesta frecuencial del filtro paso bajo ideal para un parámetro de corte a arbitrario ($0 < a < 1$)</i>	56
2.17	<i>Respuesta frecuencial del filtro paso alto ideal para un parámetro de corte a arbitrario ($0 < a < 1$)</i>	58
3.1	<i>Diagrama de bloques de un detector de QRS no sintáctico.</i>	65
3.2	<i>Diagrama de bloques del preprocesado del detector específico de QRS para medida del QT.</i>	69
3.3	<i>Amplitud de las funciones de transferencia para el filtro derivador $G_1(f)$, el filtro paso bajo $G_2(f)$ y la combinación de los dos $G_3(f)$ para una frecuencia de muestreo $f_m=250$ Hz.</i>	70

3.4	<i>Diagrama de bloques de la inicialización del detector específico de QRS para medida del QT.</i>	74
3.5	<i>Diagrama de bloques del detector específico de QRS para medida del QT.</i>	75
3.6	<i>Detección de complejos QRS en una señal ECG.</i>	77
3.7	<i>Detección de complejos QRS en una señal ECG con fuerte actividad muscular, y artefactos de movimiento.</i>	78
3.8	<i>Detección de complejos QRS en una señal ECG con variación de la línea de base y onda T de amplitud comparable al QRS.</i>	78
3.9	<i>Diagrama de bloques general para la medida de los intervalos QT.</i>	81
3.10	<i>Gráfica de definición de las ondas R y Q.</i>	83
3.11	<i>Diagrama de bloques para la definición de la posición de la onda R (R_p) y de la onda Q (Q_p).</i>	84
3.12	<i>Gráfica de identificación del inicio del QRS.</i>	86
3.13	<i>Diagrama de bloques para la definición del inicio del complejo QRS (QRS_1).</i>	87
3.14	<i>Gráfica de identificación del pico y final de la onda T.</i>	89
3.15	<i>Diagrama de bloques para la definición del pico (T_1) y final (T_2) de la onda T.</i>	91
3.16	<i>Diagrama de bloques para la selección de latidos en función del valor del QT.</i>	93
3.17	<i>Ejemplos de medida automática del intervalo QT.</i>	96
3.18	<i>Ejemplos de medida automática del intervalo QT en latidos ruidosos.</i>	98
3.19	<i>Evolución dinámica de los intervalos de QT</i>	99
3.20	<i>Diagrama de bloques del procesado lineal para el detector selectivo de QRS.</i>	101

3.21	<i>Respuesta frecuencial de los filtros paso alto $H_2(f)$, paso bajo $H_1(f)$, y derivador $H_3(f)$, para una frecuencia de muestreo $f_m = 1000$ Hz y ganancia unitaria.</i>	102
3.22	<i>Respuesta frecuencial del filtro paso banda, composición del paso bajo $H_1(f)$ y paso alto $H_2(f)$, para una frecuencia de muestreo $f_m = 1000$ Hz.</i>	103
3.23	<i>Diagrama de bloques de la transformación no lineal para el detector selectivo de QRS.</i>	105
3.24	<i>Diagrama de bloques de la inicialización de la regla de decisión del detector selectivo de QRS.</i>	106
3.25	<i>Diagrama de bloques de la regla de decisión del detector selectivo de QRS.</i>	107
3.26	<i>Diagrama de bloques para la selección de latidos del detector selectivo de QRS.</i>	109
3.27	<i>Señales obtenidas para las diferentes etapas de procesado del detector delectivo de QRS.</i>	110
3.28	<i>Actuación del detector selectivo de QRS sobre un ECG con fuerte actividad muscular.</i>	111
3.29	<i>Actuación del detector selectivo de QRS sobre un ECG con ondas T de mayor amplitud que el QRS.</i>	112
4.1	<i>La señal ECG como suma algebraica de los potenciales de acción.</i>	119
4.2	<i>Valores del QT en los tres grupos de pacientes.</i>	127
4.3	<i>Valores del QTP en los tres grupos de pacientes. La notación es la misma que se utiliza en la figura 4.2.</i>	128
4.4	<i>Valores del QT_c en los tres grupos de pacientes. La notación es la misma que se utiliza en la figura 4.2.</i>	129

4.5	Valores del QTP_c en los tres grupos de pacientes. La notación es la misma que se utiliza en la figura 4.2.	130
4.6	Valores del intervalo RR en los tres grupos de pacientes. La notación es la misma que se utiliza en la figura 4.2, pero los incrementos de tiempo se hacen de 100 en 100 ms.	131
4.7	Porcentaje de latidos cuyo valor de QT_c es mayor que ciertos umbrales.	134
4.8	Evolución dinámica de los intervalos de QT	136
4.9	Definición imprecisa del pico de la onda T.	139
5.1	Señal Gaussiana $s(t)$ generada por computador.	168
5.2	Señal QRS ($s(t)$) proveniente de un registro real.	172
5.3	Definición de ventanas para la medida de intervalos temporales.	178
5.4	Dos realizaciones (ventanas) de una onda $s(t)$ retardadas una distancia temporal D	178
5.5	(a) Dos segundos de señal ECG perteneciente al primer paciente P1 en que se han medido los distintos intervalos. (b) Mismo tiempo de ECG correspondiente a P2.	182
5.6	Intervalos medidos en el paciente P1.	183
5.7	Intervalos medidos en el paciente P2.	185
5.8	Intervalos TT y QRS-T en el paciente P2.	186
6.1	Estructura lineal adaptativa	194
6.2	Esquema de procesamiento adaptativo usando la estructura lineal adaptativa	205
6.3	Mejora de la SNR en función del número de recurrencias (A).	218
6.4	Cinco primeras funciones de Hermite en un intervalo de 400 ms y para un valor de $b=25$ ms.	221

6.5	<i>Esquema adaptativo para el modelo de Hermite. Nótese cómo las funciones que sirven de entrada de referencia son generadas con un parámetro b variable.</i>	223
6.6	<i>Derivadas respecto a b de las seis primeras funciones de Hermite superpuestas con la función original que corresponde a la gráfica de máxima amplitud en cada caso.</i>	225
6.7	<i>Estimación con constancia de forma.</i>	232
6.8	<i>Convergencia de los pesos según el número de recurrencias A procesadas para el caso del QRS1.</i>	233
6.9	<i>Convergencia del error R_{mse} según el número de recurrencias A procesadas para el caso del QRS1.</i>	234
6.10	<i>Convergencia del parámetro b según el número de recurrencias A procesadas para el caso del QRS1.</i>	235
6.11	<i>Ocho diferentes patrones de QRS superpuestos con su estimación según el modelo de Hermite con las 5 primeras funciones y mismo QRS en cada recurrencia.</i>	236
6.12	<i>Estimación de QRS1 con diferente número de pesos N.</i>	237
6.13	<i>Estimación de la forma del QRS en una secuencia real.</i>	238
6.14	<i>Detección de QRS ectópicos aislados.</i>	240
6.15	<i>Estimación de la forma variable de QRS en caso de bigeminismo.</i>	241
6.16	<i>Funciones impulso b_{ik} que actúan de entradas de referencia en el filtro adaptativo para señales definidas en un intervalo de L muestras ($L = 100$).243</i>	
6.17	<i>Esquema del filtro adaptativo realizado con una sola entrada impulsional.244</i>	
6.18	<i>Resultados para 80 recurrencias ($d_k(m)$) con la misma componente determinista (s_k). $SNR_d = 20$ dB.</i>	250
6.19	<i>Resultados para 80 recurrencias ($d_k(m)$) con la misma componente determinista (s_k). $SNR_d = 10$ dB.</i>	250

- 6.20 Resultados para 160 recurrencias ($d_k(m)$) con un cambio en la componente determinista s_k en la recurrencia 81. $SN R_d = 10$ dB. . . 251
- 6.21 Aplicación del filtro adaptativo a señales ECG de alta resolución reales (100 recurrencias). 252
- 6.22 Señales mostradas en la figura anterior (6.21) después de filtradas con un filtro FIR paso banda 50-250 Hz. 253
- 6.23 Resultados obtenidos al aplicar primero el filtro FIR paso banda 50-250 Hz seguido del filtrado adaptativo. Los resultados son los mismos que en el caso inverso dada la linealidad de ambos filtros. 254

Lista de Tablas

1.1	<i>Derivaciones normalizadas a partir de las posiciones de los electrodos.</i>	9
1.2	<i>Valores típicos de los intervalos del ECG y de la amplitud de las diferentes ondas en él presentes.</i>	13
2.1	<i>Filtros LPD para identificación de la morfología del QRS.</i>	39
2.2	<i>Coefficientes de los filtros LPD para identificación de la morfología de las ondas P y T.</i>	43
2.3	<i>Coefficientes de los filtros LPD para detección de QRS.</i>	46
2.4	<i>Coefficientes de los filtros LPD para detección de ondas P y T.</i>	49
2.5	<i>Coefficientes de los filtros LPD para enfatizado de ondas P y T respecto de QRS.</i>	52
2.6	<i>Filtros LPD óptimos, de 1, 2 y 3 coeficientes, en los cinco casos considerados en el texto y con diferentes f_m. El subíndice (s, a) indica configuración simétrica o antisimétrica, respectivamente.</i>	55
3.1	<i>Resultados de validación del algoritmo de QT.</i>	95
4.1	<i>Valores medios de los intervalos de QT en el tiempo y en los pacientes.</i>	132
4.2	<i>Valores medios de los intervalos (QT-QTP) en el tiempo y en los pacientes.</i>	137

5.1	<i>Resultados en simulación de la media y la desviación tipo con señales Gaussianas.</i>	170
5.2	<i>Criterio de corrección del estimador $\hat{D}_{s,2}$. Se presentan el sesgo $B_{\hat{D}_{s,2}}$ y la desviación tipo $\sigma_{\hat{D}_{s,2}}$.</i>	171
5.3	<i>Resultados en simulación de la media y la desviación tipo con señales QRS reales.</i>	173
5.4	<i>Estimación de la SNR.</i>	175

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

La señal Electrocardiográfica (ECG) representa la actividad eléctrica del corazón registrada en la superficie del cuerpo. El análisis de esta señal, obtenida de forma no invasiva, es la forma más común de estudiar y diagnosticar cardiopatías, dada su estrecha vinculación con la actividad del corazón.

Las enfermedades cardíacas son una de las primeras causas de muerte en el mundo. Por ello es evidente el gran interés que tiene el estudio de la señal ECG para obtener de ella tanta información como sea posible sobre el funcionamiento del corazón y sus posibles irregularidades. Este interés es reforzado por el hecho de que el análisis del ECG es una prueba no invasiva, y por tanto más fácilmente realizable y menos traumática para el paciente.

Al campo de trabajo concerniente con la señal ECG se le conoce con el nombre de Electrocardiografía. Esta puede decirse que nació en el siglo XIX, cuando Burdon-Sanderson y Page (1878) obtuvieron potenciales cardíacos con la ayuda de electrómetros capilares. Estos potenciales fueron obtenidos del hombre por primera vez por Waller (1887), y con una técnica algo más mejorada, usando un galvanómetro, por Einthoven (1903). Desde estos primeros trabajos hasta la actualidad, la evolución de la técnica en todos sus campos ha permitido mejorar y ampliar las aportaciones de la Bioingeniería a la Electrocardiografía. La Bioingeniería se ha ocupado de desarrollar técnicas de adquisición, monitorización, procesado y análisis de la señal ECG. El desarrollo de la electrónica ha permitido la realización de equipos electrónicos

para el procesamiento con altas prestaciones de estas señales. Los computadores y microprocesadores, así como las técnicas de procesado de señal, han propiciado asimismo un gran avance en el análisis e interpretación automáticos del ECG.

Un problema abordado por la Electrocardiografía es el registro de la señal ECG. En muchos casos interesa tener un registro ambulatorio del ECG, de modo que pueda tenerse un seguimiento del paciente cuando éste realiza vida normal. Este registro ambulatorio del ECG no fue posible durante muchos años, hasta que Norman Holter construyó un equipo de telemetría para transmitir el ECG desde el paciente a la unidad de registro. El equipo presentaba múltiples problemas, especialmente su escasa portabilidad. Ello motivó que más tarde Holter (1961) desarrollara un equipo usando un registrador de cinta magnética donde se grababa la señal ECG, obteniéndose así registros de larga duración. Este es el fundamento de los equipos que hoy se conocen con el nombre de *Holter* y que sirven para realizar automáticamente registros ambulatorios de la señal ECG durante un número de horas que, generalmente, oscila entre 12 y 24. Los registros de cinta son posteriormente leídos a una velocidad que oscila entre 60 y 120 veces la velocidad a la que fueron grabados, de modo que se reduce notablemente el tiempo requerido para ello.

Una vez realizada la lectura de un registro ECG de Holter, se procede a la extracción, en muchos casos manual, de los eventos clínicamente significativos o de las medidas de interés en cada caso. Un registro típico de 24 horas de señal ECG puede contener más de 100.000 latidos cardiacos. Resulta entonces evidente que las técnicas manuales aplicadas de forma exhaustiva sobre estos registros son prácticamente inviables. Desde la aparición de los computadores, un campo de investigación que ha tenido un notable auge es precisamente el desarrollo de técnicas automáticas de reconocimiento y medida de características y parámetros de interés en el ECG. Cabe precisar que el uso de computadores no proporciona más información de la presente *per se* en el ECG, pero sí que puede obtener mucha más de la detectada directamente sobre el registro convencional y de forma mucho más eficiente.

La aportación de este trabajo se centra en el procesado automático de la señal ECG, haciendo uso de técnicas digitales basadas en computadores o microprocesadores y técnicas de procesado de señal, las cuales permiten tratar registros de larga duración. Las técnicas de procesado aplicadas sobre la señal ECG dependen del objetivo final

de éste, pero en cualquier caso existen distintas etapas que suelen ser comunes en cualquier aplicación. Estas son:

- Mejora de la relación señal ruido (SNR) presente en la señal original.
- Reconocimiento de la actividad correspondiente a cada latido cardiaco.
- Medida u obtención de la información requerida sobre cada latido o del conjunto de todos ellos.
- En su caso, extracción de conclusiones que proporcionen un diagnóstico.

En el presente trabajo se presenta una aportación para el reconocimiento y medida de algunos de los puntos más significativos del ECG, lo cual posteriormente permitirá determinar distancias temporales entre los eventos fisiológicos que representan o realizar posteriores procesados que toman como referencia estos puntos. Además se consideran técnicas de filtrado lineal y adaptativo para facilitar la medida de los puntos antes mencionados y mejorar la SNR del ECG. En el caso del filtrado adaptativo se consideran otras aplicaciones de interés, como es el seguimiento dinámico de la señal ECG vinculada al impulso que desencadena al latido cardiaco, y que puede presentar variaciones de un latido a otro. Los objetivos de este trabajo se presentan más en detalle en el apartado 1.2, donde se pormenorizan los problemas abordados en cada capítulo y los objetivos específicos.

El desarrollo del trabajo aquí presentado se ha realizado en el marco de un proyecto de investigación financiado por la CICYT (Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología) y del convenio de colaboración existente entre entre la Universidad Politécnica de Cataluña (UPC) y el Hospital de la Santa Cruz y San Pablo.

A continuación se introducen algunos conceptos básicos respecto a la señal ECG y su origen, de modo que se facilite la comprensión de este trabajo. Un estudio más detallado de la señal ECG, y en general de la Electrocardiografía, puede encontrarse en (Webster, 1988).

1.1 La señal electrocardiográfica

1.1.1 Origen fisiológico

El origen de la señal ECG se encuentra en las células del músculo cardíaco. Estas células tienen la propiedad de ser excitables eléctricamente, produciéndose un flujo de iones a través de su membrana que produce un potencial eléctrico variable entre el interior y el exterior (potencial de acción de la célula). Este hecho puede modelarse en una primera aproximación como un dipolo eléctrico variable. En este proceso de excitación, la membrana celular cambia de polaridad (se despolariza), para posteriormente volver a la normalidad en la fase de recuperación (repolarización). Cuando una célula del músculo cardíaco se excita eléctricamente se produce un efecto de propagación, excitando a las células de las regiones adyacentes.

El primer impulso que desencadena el proceso de excitación de todas las células cardíacas ocurre en el nodo seno-auricular (SA), localizado en la proximidad entre la vena cava superior y la aurícula derecha. Este impulso pasa, de una forma organizada, del nodo SA a las vías de conducción en la aurícula, de modo que se activa primero la aurícula derecha y después la izquierda. Posteriormente este impulso es retardado en el nodo aurículo-ventricular (AV), para más tarde continuar por el haz de His y pasar a excitar a los dos ventrículos, produciendo la contracción de éstos.

La propagación de esta activación genera los dipolos eléctricos variables en todas las células, y éstos a su vez generan los correspondientes potenciales de acción. Estos potenciales se encuentran desfasados en el tiempo y en el espacio, según su ubicación y el momento en que se excita cada célula. Esta distribución de dipolos genera un campo eléctrico variable en la superficie del cuerpo, resultado de sumar el efecto de todos ellos en el lugar que se considere (suma escalar del potencial correspondiente a cada célula en ese punto). Este potencial total dependerá del lugar del cuerpo y del instante de tiempo en que se determine. Midiendo la diferencia de potencial entre dos puntos de la superficie del cuerpo y su evolución temporal, se tiene una señal proporcional a esta diferencia de potencial que constituye la señal Electrocardiográfica o ECG.

1.1.2 Electroodos

Para medir y registrar la diferencia de potencial entre dos puntos de la superficie del cuerpo se necesita un elemento sensor de esta magnitud física. Este transductor está formado por un par de electrodos que convierten las corrientes iónicas en el cuerpo en corrientes eléctricas en un conductor.

Los electrodos pueden clasificarse en polarizables y no polarizables (Webster, 1978). Los electrodos polarizables se comportan como un condensador, de modo que una corriente constante que fluye por ellos genera un voltaje que se incrementa indefinidamente. Los electrodos no polarizables se comportan como una resistencia, de modo que una corriente constante que fluya por ellos produce una diferencia de potencial constante entre ellos.

Ninguno de estos dos tipos de electrodos es realizable físicamente, y los electrodos reales se pueden, sólo, aproximar mejor por uno u otro tipo de los anteriormente descritos. En general los electrodos están formados por una parte metálica, que hace propiamente de electrodo, y de un electrolito, que es el que permite efectuar la transformación entre iones y electrones al reaccionar con el electrodo. Los electrodos basados en metales nobles se comportan más como electrodos polarizables, y los basados en Ag-AgCl se comportan más como electrodos no polarizables.

La unión electrolito-electrodo puede modelarse por una resistencia (resistencia del electrolito) en serie con el conjunto de una resistencia y un condensador en paralelo (unión electrolito-electrodo), y un potencial fijo que aparece en la unión electrolito-electrodo. Análogamente puede hacerse con la unión piel-electrolito.

El movimiento relativo de las superficies piel-electrolito y electrolito-electrodo provocan artefactos de movimiento, que son una de las fuentes de ruido en la señal ECG. Estos artefactos es deseable que queden reducidos lo más posible para tener una buena calidad del registro de ECG.

La mayoría de los electrodos constan de una parte adhesiva y una parte conductora. La parte adhesiva suele ser de espuma, papel o material sintético que debe ser no alérgico, y la parte metálica es comúnmente de Ag-AgCl. El electrolito suele estar compuesto de una pasta electrolítica inmersa en una esponja húmeda, de modo que

garantice un adecuado contacto con la piel y minimice los artefactos de movimiento.

1.1.3 Derivaciones

Una vez descrito el elemento sensor de la diferencia de potencial entre dos puntos del cuerpo, es necesario seleccionar la posición de éstos para detectar la señal ECG. Los cardiólogos, a fin de unificar criterios, han estandarizado diferentes puntos de medida del ECG que son descritos seguidamente (Webster, 1988). A cada posición de medida (par de puntos) se le conoce con el nombre de derivación, y por extensión a la señal ECG registrada entre esos dos puntos se le denomina con el mismo término.

Las tres primeras derivaciones normalizadas fueron propuestas por Einthoven (1913) y se conocen con el nombre de derivaciones bipolares I, II, y III. Estas están definidas a partir de los potenciales en: la pierna derecha (RL), pierna izquierda (LL), brazo derecho (RA) y brazo izquierdo (LA). El punto RL sirven como la referencia de voltaje para el amplificador y las derivaciones están formadas por las tres posibles combinaciones de pares de los restantes puntos, según se describe en la tabla 1.1. Estos tres puntos forman el triángulo conocido como triángulo de Einthoven (figura 1.1).

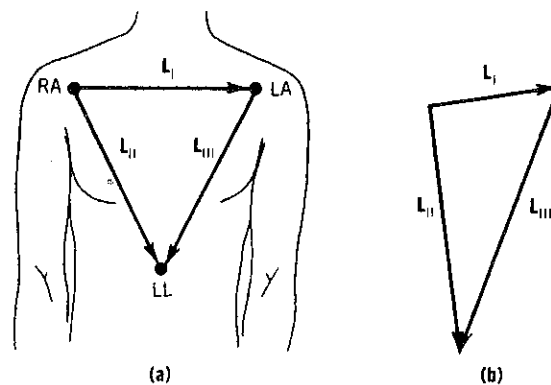


Figura 1.1: *Derivaciones bipolares del triángulo de Einthoven correspondientes al plano frontal (Reproducido de Webster (1988)).*

Otras tres derivaciones tipo fueron propuestas por Goldberger y se denominan como

derivaciones aumentadas (aV_R , aV_L y aV_F). Estas se calculan a partir de los mismos puntos anteriores y con una red de resistencias de modo que calculan el voltaje entre un punto del triángulo de Einthoven y el valor medio del voltaje en los otros dos (tabla 1.1).

Las derivaciones hasta ahora consideradas toman sólo la actividad cardiaca en un plano frontal al cuerpo humano. Existen otras seis derivaciones normalizadas, denominadas unipolares precordiales o derivaciones V_i ($i=1, \dots, 6$), propuestas por Wilson y que recogen la actividad cardiaca en un plano transversal. Las posiciones de los electrodos (v_i , $i=1, \dots, 6$) están repartidas por el pecho en un plano transversal al torso (figura 1.2). La referencia del amplificador es un punto denominado terminal central de Wilson y cuyo potencial es el promedio de las tensiones en los puntos RA, LA y LL. La señal ECG es la diferencia de potencial entre cada punto v_i y este punto terminal central de Wilson (tabla 1.1).

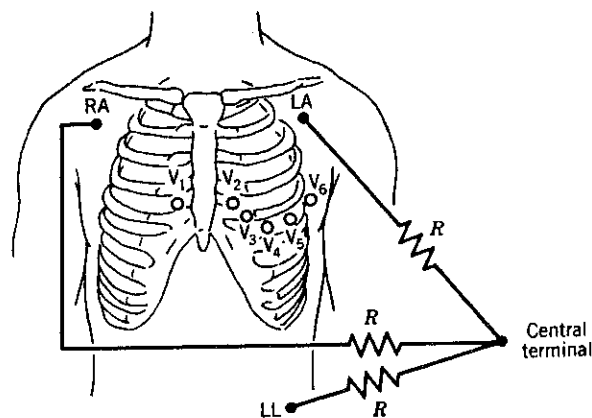


Figura 1.2: Derivaciones precordiales (Reproducido de Webster (1988)).

Normalmente estas 12 derivaciones consideradas son las que se usan en el diagnóstico de cardiopatías, ya que un subconjunto de ellas puede perder información sobre la actividad eléctrica cardiaca en otras proyecciones.

Existen otras derivaciones llamadas ortogonales o de Frank (X,Y,Z) y que pretenden recoger la proyección de la actividad cardiaca en tres ejes ortogonales definidos en el cuerpo humano. Se calculan tomando los electrodos entre diferentes puntos del cuerpo (A, C, E, I, M, F, H) y una determinada red de resistencias que generan las derivaciones

X, Y y Z (tabla 1.1 y figura 1.3), manteniéndose como referencia el punto RL. Por último, en ocasiones se utilizan derivaciones ortogonales sin corregir, obtenidas con electrodos situados directamente sobre los ejes x, y, z considerados.

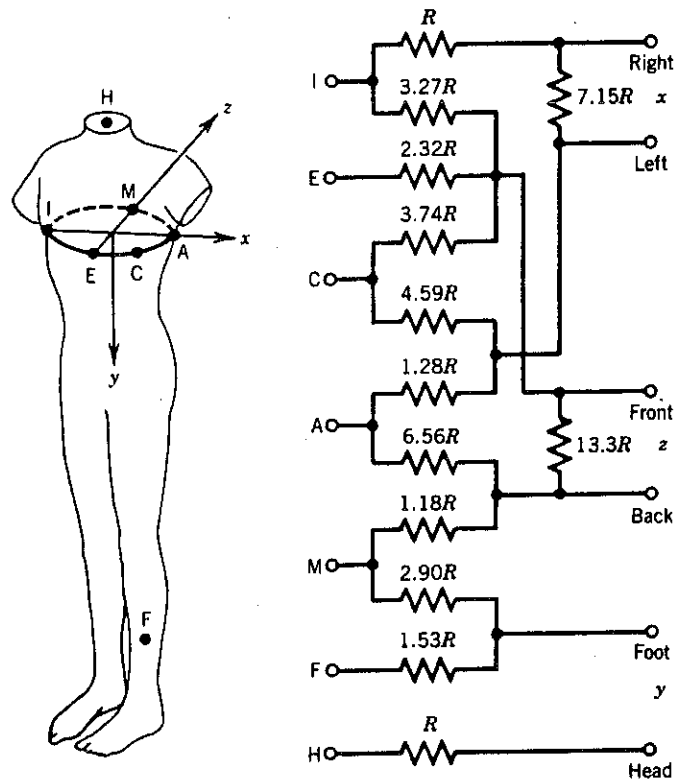


Figura 1.3: Derivaciones ortogonales X, Y, Z, con la red de resistencias necesaria para su cálculo (Reproducido de Webster (1988)).

En este trabajo se consideraran las derivaciones tipo y puntualmente alguna diferente como las ortogonales sin corregir.

1.1.4 Adquisición de la señal ECG

La principal función de un equipo de adquisición es amplificar la señal ECG y eliminar el ruido ambiental, biológico y los artefactos presentes en la señal. Generalmente se usa un amplificador diferencial, ya que la señal ECG corresponde a la componente diferencial de los potenciales en dos puntos de la superficie del cuerpo. Así, las interferencias de 50/60 Hz son tomadas como componente de señal en modo común

DERIVACIONES		
Tipo de Derivacion	Electrodos	Definición
Bipolares	RL, LL, RA, LA	$I = LA - RA$ $II = LL - RA$ $III = LL - LA$
Aumentadas	RL, LL, RA, LA	$aV_R = RA - 0.5 (LA + LL)$ $aV_L = LA - 0.5 (LL + RA)$ $aV_F = LL - 0.5 (LA + RA)$
Unipolares	v_1, v_2, \dots, v_6	$V_1 = v_1 - (LA + RA + LL)/3$ $V_2 = v_2 - (LA + RA + LL)/3$ $V_3 = v_3 - (LA + RA + LL)/3$ $V_4 = v_4 - (LA + RA + LL)/3$ $V_5 = v_5 - (LA + RA + LL)/3$ $V_6 = v_6 - (LA + RA + LL)/3$
Ortogonales	I, E, C, A, M, H, F	$X = 0.610 A + 0.171 C - 0.781 I$ $Y = 0.655 F + 0.345 M - 1.000 H$ $Z = 0.133 A + 0.736 M - 0.264 I$ $- 0.374 E - 0.231 C$

Tabla 1.1: Derivaciones normalizadas a partir de las posiciones de los electrodos.

y son atenuadas. Es necesario por tanto que los amplificadores diferenciales usados tengan un elevado factor de rechazo en modo común, así como una alta impedancia de entrada. La señal suministrada por el amplificador está limitada al rango de frecuencias deseado, y actúa como entrada a un monitor, un registrador o un sistema de adquisición digital basado en computador.

Las características de un amplificador diferencial ideal, que constituye el elemento básico para un amplificador de señal ECG, se enumeran a continuación (Webster, 1988):

- Ganancia en lazo abierto infinita
- Impedancia de entrada infinita
- Impedancia de salida despreciable
- Elevada anchura de banda
- Factor de rechazo en modo común infinito
- Offset en continua despreciable
- Variaciones con la temperatura despreciables
- Fácil de uso

El sistema de adquisición debe de estar protegido para las situaciones y entornos eléctricamente peligrosos, de modo que esté limitada la corriente que puede circular por el paciente. Esto se consigue con un preamplificador de aislamiento que desacopla al paciente del resto del circuito. Otras protecciones específicas deben ser consideradas para cada caso concreto. Por ejemplo, protección del amplificador cuando existe un desfibrilador instalado en el paciente, eliminación de los pulsos de señal generados por un marcapasos, recuperación de la línea de base cuando el amplificador se satura, etc.

El siguiente paso es el registro de la señal. Los registros más típicos son sobre papel, para después analizar la señal registrada. Desde el desarrollo de los computadores cada vez más se usan registros digitales de la señal. Para ello, la señal es convertida en una serie de muestras correspondientes al valor del ECG en instantes de tiempo igualmente espaciados (periodo de muestreo). Eligiendo adecuadamente la frecuencia de muestreo

(inverso del periodo de muestreo), estos valores representan a la señal sin pérdida de información. Su posterior digitalización permite su almacenamiento en el computador y su procesamiento. Normalmente se utilizan frecuencias comprendidas entre 200 y 5000 Hz. Las frecuencias más bajas se usan en registros de larga duración, ya que supone un menor número de datos a almacenar, si bien la información almacenada también es menor. Las más altas se suelen usar en Electrocardiografía de alta resolución para detectar componentes de alta frecuencia. En cualquier caso, es necesario realizar un filtrado analógico previo con una frecuencia de corte menor que la mitad de la de muestreo para así evitar problemas de *aliasing* (Oppenheim y otros, 1985).

1.1.5 Caracterización de la señal ECG

La señal Electrocardiográfica está, como ya se ha visto, asociada a la actividad del músculo cardiaco. Por tanto, el ECG presenta un comportamiento repetitivo unido a cada recurrencia de los latidos cardiacos.

Cada recurrencia o ciclo de la señal ECG consta de distintas ondas en una secuencia determinada. Cada onda, o grupo de éstas, representa a una de las distintas fases del latido cardiaco, y se denotan por una letra del alfabeto (P, Q, R, S, T). La figura 1.4 muestra una señal ECG ideal correspondiente a un latido cardiaco. El segmento horizontal que precede la onda P se denomina línea de base o línea isopotencial. La onda P representa la despolarización del músculo de la aurícula. La siguiente secuencia de ondas QRS, también denominado QRS o complejo QRS, refleja la combinación de la despolarización ventricular y la repolarización auricular que ocurren prácticamente al mismo tiempo. La onda Q es la primera inflexión negativa (hacia abajo) previa a una positiva, la onda R es la primera inflexión positiva (hacia arriba) y la onda S es la primer inflexión negativa posterior a una positiva. Una o más de estas ondas puede no estar presente, y en ocasiones aparece una segunda onda R que se denota como onda R'. La onda T representa la repolarización ventricular. En ocasiones, posteriormente a la onda T aparece una onda U de escasa amplitud y origen incierto.

Los intervalos temporales dentro de la señal correspondiente a cada latido tienen importancia desde el punto de vista del diagnóstico. Así, el segmento PR indica el tiempo de conducción aurículo-ventricular. El segmento ST expresa el tiempo

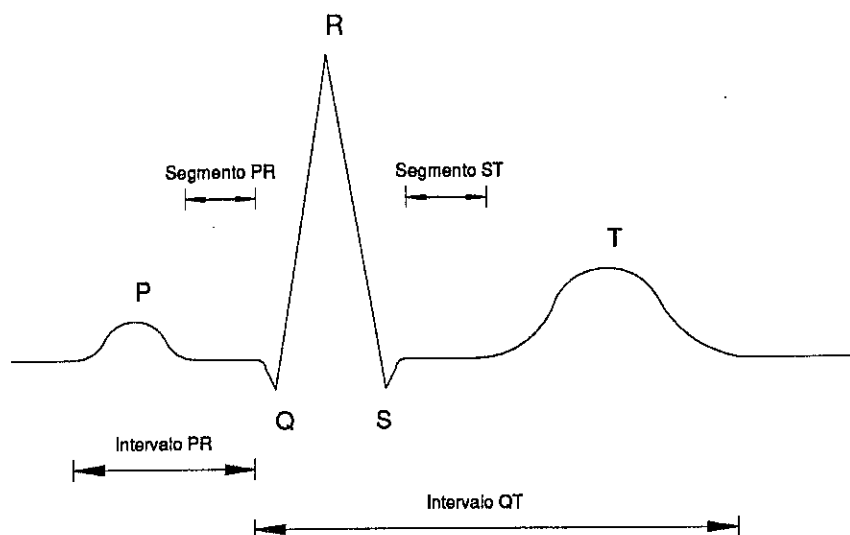


Figura 1.4: Señal ECG ideal correspondiente a un latido cardiaco con la indicación de las ondas, intervalos y segmentos clásicos.

entre el final de la despolarización ventricular y el inicio de la repolarización también ventricular, que coincide con el inicio de la onda T. Otro intervalo de interés es el intervalo QT, o tiempo en que el ventrículo no está en reposo debido a la despolarización o repolarización de sus células. Este intervalo será objeto de especial estudio en este trabajo. Asimismo, en ocasiones resultan de interés intervalos como la anchura del QRS (distancia desde el inicio de la onda Q al final de la onda S). Este intervalo refleja el tiempo total de despolarización del músculo de los ventrículos.

Además de estas medidas absolutas correspondientes a un latido cardiaco existen otras relativas a latidos consecutivos, como son el ritmo cardiaco medido a través del intervalo RR, que es la distancia entre ondas R pertenecientes a latidos cardiacos consecutivos. Otras medidas de gran interés en el diagnóstico son la variabilidad en el tiempo de la forma de las ondas y del valor de los intervalos. Así, la variabilidad de los intervalos PR, RR y QT puede resultar muy significativa para el diagnóstico de determinadas patologías. Apariciones de latidos que cambian bruscamente de forma, como son los latidos ectópicos o contracciones ventriculares prematuras, son de gran interés y su detección es un problema importante en Electrocardiografía.

En la tabla 1.2 se presentan los valores típicos de amplitud para las distintas ondas,

expresado en voltaje en la superficie del cuerpo. También se presentan algunos de los valores más comunes de los intervalos antes mencionados (Cromwell y otros, 1980).

<i>Amplitud</i>	Onda P	0.25 mV
	Onda R	1.60 mV
	Onda Q	25% de la onda R
	Onda T	0.1 a 0.5 mV
<i>Duración</i>	Intervalo PR	0.12 a 0.20 s
	Intervalo QT	0.35 a 0.44 s
	Segmento ST	0.05 a 0.15 s
	Intervalo de la onda P	0.11 s
	Intervalo QRS	0.06 a 0.10 s
	Intervalo RR	0.6 a 1 s

Tabla 1.2: Valores típicos de los intervalos del ECG y de la amplitud de las diferentes ondas en él presentes.

Los elementos anteriormente descritos (ondas e intervalos) constituyen las características más clásicas y significativas del ECG convencional. Además de la información

suministrada por estas características, se puede obtener otro tipo de información a través de la actividad cardíaca de baja amplitud (del orden de μV) respecto a la de las ondas clásicas. Esta actividad se encuentra normalmente en el segmento PR, que corresponde al paso del impulso eléctrico por el haz de His (potenciales del haz de His), y en la zona postQRS y segmento ST que corresponde a posibles irregularidades en la activación del ventrículo, y por tanto, de gran interés clínico. Estos últimos potenciales se conocen con el nombre de potenciales ventriculares tardíos. La parte de la Electrocardiografía que estudia estos potenciales se conoce con el nombre de Electrocardiografía de alta resolución.

Las componentes frecuenciales de la señal ECG se encuentran básicamente entre continua y 100 Hz para las componentes convencionales, y algo mayor para los potenciales de baja amplitud, dependiendo su valor concreto de cada paciente. Un estudio de las componentes frecuenciales del ECG puede encontrarse en Thakor y otros

(1984b). En este estudio se analizan las componentes espectrales de cada onda y en la figura 1.5 se presentan los resultados en él obtenidos.

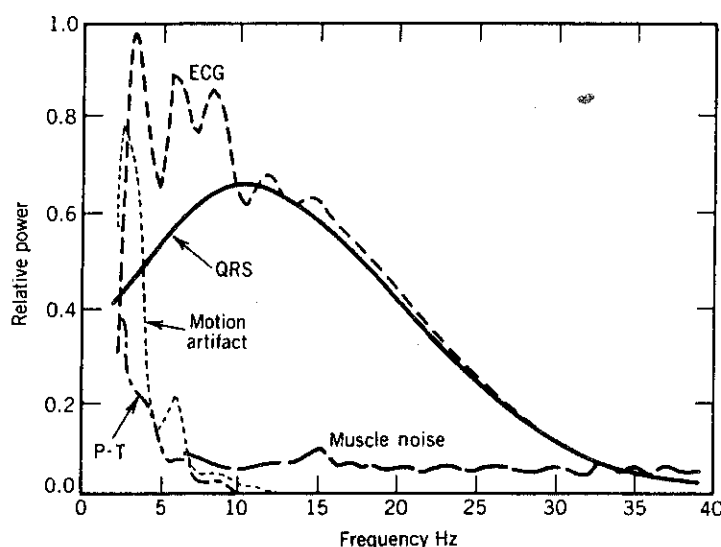


Figura 1.5: Espectro del ECG y sus componentes (Reproducido de Thakor y otros (1984b)).

La señal ECG generalmente no se encuentra en condiciones ideales sino que aparece contaminada por ruido de distintos tipos (Thakor y otros, 1984a). Los más comunes son los artefactos de movimiento y las interferencias eléctricas causadas por el entorno.

Los artefactos de movimiento pueden manifestarse como variaciones de la línea de base debidas a: artefactos inducidos por la respiración, desplazamiento de los electrodos en su contacto con la piel y ruido muscular. Estos pueden minimizarse con una adecuada preparación de la piel y de las conexiones de los electrodos.

Las fuentes de interferencias eléctricas más comunes son: 50/60 Hz de la red eléctrica, interferencias de radiofrecuencia generadas por la instrumentación, e interferencias electromagnéticas inducidas por campos magnéticos variables. Para reducir estas interferencias se usan amplificadores con un alto factor de rechazo en modo común para la interferencias de la red (50/60 Hz), se trenzan los cables entre sí para reducir el flujo magnético que genera las interferencias inducidas, y se pueden

introducir pequeñas capacidades en serie en los electrodos, que filtran las componentes de radiofrecuencia y actúan como circuitos cerrados para la señal ECG.

Como puede notarse en la figura 1.5, las ondas de más alta frecuencia en el ECG corresponden al complejo QRS, mientras que las ondas P y T tienen componentes frecuenciales más bajas (< 10 Hz). Si el ruido dominante en la señal ECG es ruido muscular, éste puede considerarse como blanco, dado que su espectro es bastante plano en la banda del ECG.

1.1.6 Patologías asociadas con el ECG

A continuación se describen alguna de las patologías más clásicas y su efecto sobre las ondas características del ECG (Webster, 1988).

Hipertrofia ventricular. El corazón responde a un incremento de carga con un aumento de la masa muscular. El incremento de carga puede provenir de una hipertensión o una estenosis aórtica o pulmonar. En ambos casos, el corazón necesita un mayor esfuerzo para realizar el bombeo de la sangre y responde aumentando su masa muscular. Las consecuencias en el ECG se muestran en un aumento de la amplitud del QRS unido a un incremento en la duración de éste.

Defectos de conducción ventricular. Estos defectos pueden ser congénitos o adquiridos y consisten en una anormal iniciación de la activación de los ventrículos. Este efecto se muestra en el ECG en una mayor duración del complejo QRS.

Preexcitación. Se da cuando la conducción del impulso eléctrico de la aurícula al ventrículo se realiza por canales distintos a la unión aurículo-ventricular, y, por tanto, no existe el retardo que esta unión en condiciones normales ocasiona. El efecto sobre el ECG consiste en un anormal patrón del complejo QRS.

Infarto. Se produce cuando el flujo de sangre a una región del músculo cardíaco se reduce o interrumpe. Las células de esta región son dañadas y pueden en ocasiones morir. El impulso eléctrico cuando llega a esta región necesita seguir otras vías de propagación de las usualmente seguidas, ya que estas células quedan inactivas. El efecto sobre el ECG no es unívoco y depende de cada caso. Cuando las células no han muerto sino que han sido parcialmente dañadas (isquemia), se suele reflejar en una

anormal elevación o depresión del segmento ST debido a una más rápida repolarización de dichas células.

Patologías asociadas con el entorno cardiaco. Son modificaciones en el ECG debido a alteraciones no en el corazón, sino del volumen conductor que le rodea. Algunas de estas son enfermedades pulmonares, que cambian la orientación del corazón y que presentan una menor conductividad del pulmón, ocasionando una menor amplitud del ECG. La pericarditis o inflamación del saco pericárdico ocasiona también una reducción de la tensión del QRS y la onda T. Algunas enfermedades congénitas de corazón pueden generar hipertrofias, que presentan efectos sobre el ECG análogos a los ya comentados en primer lugar.

Arritmias. Consisten en irregularidades en el ritmo cardiaco debidas a cambios en la inicialización del impulso generador del latido o a problemas de conducción entre la aurícula y los ventrículos. Su efecto en el ECG puede ser cambios en el ritmo cardiaco o variaciones en la forma de la señal.

Las arritmias más clásicas son la taquicardia y bradicardia auriculares, que presentan un ECG normal pero con un ritmo cardiaco superior a 100 latidos por minuto o inferior a 60 latidos por minuto, respectivamente. Otra arritmia clásica es la denominada arritmia ventricular, que genera contracciones ventriculares prematuras (PVC) y que produce un QRS con diferente forma y duración. La taquicardia ventricular (VT) es generada por una activación reentrante del tejido ventricular después de la repolarización y ocasiona ritmos cardiacos de 130 a 180 latidos por minuto. La fibrilación ventricular (VF) es debida a una repolarización aleatoria del músculo cardiaco y genera una ondas en el ECG irregulares y continuas. Estas dos últimas arritmias conllevan un serio riesgo para el paciente.

1.1.7 Etapas básicas del procesado del ECG

Una vez la señal ECG es registrada, comienza la fase de procesado para obtener la información concreta que se desea conocer en cada caso. La señal ECG presenta las siguientes características: es de tipo transitorio, está contaminada por ruido y vinculada temporalmente a un impulso, que es el que desencadena cada latido cardiaco. Las etapas más comunes de un sistema de procesado de señal ECG son las siguientes (Webster,

1988):

1. Preprocesado, que incluye filtrado de la señal y eliminación de artefactos. De este modo se reducirán los errores en posteriores procesados y se facilitará la interpretación del ECG.
2. Detección de los complejos QRS. Este es siempre el primer paso para reconocer en qué momento se ha producido cada latido y poder calcular el ritmo cardiaco. La razón para detectar el QRS y no otra onda es que presenta mayor SNR y, por tanto, es más fácil de realizar.
3. Identificación de las ondas P, T y segmento ST. Este paso trata de particularizar cada componente de un latido y poder obtener información sobre él.
4. Identificación de los tipos de latidos (normales, PVC, ...).
5. Detección y clasificación de arritmias.
6. Diagnóstico.

En este trabajo se considerarán las etapas del preprocesado, detección de QRS e identificación de ondas en el ECG, lo que permitirá extraer la información clínicamente relevante en cada caso.

A continuación, en el apartado siguiente, se revisan los objetivos concretos que se plantean en este trabajo dentro del campo del procesado de la señal ECG.

1.2 Objetivos de la tesis

Seguidamente se pasa a presentar los objetivos abordados en la presente tesis. Esta ha sido estructurada en capítulos que abordan aspectos diferentes pero complementarios del procesado aquí planteado. En todo momento se ha tenido especial atención en presentar la aplicación del tratamiento teórico a señales ECG reales.

El objetivo de esta tesis es el diseño y desarrollo de métodos automáticos de procesado y análisis de la señal ECG. Determinados métodos están tratados de forma

que se aplican sobre registros ambulatorios de larga duración (registros de Holter). Otros están orientados para ser aplicados sobre registros de corta duración grabados en reposo. Puntualmente se considera la aplicación de alguna de las técnicas propuestas sobre registros de ECG de alta resolución.

Pormenorizando más en detalle los objetivos de este trabajo, se pueden enumerar los siguientes aspectos:

- 1. Diseño de filtros derivadores para señales biológicas.** En el capítulo 2 se considera la aplicación de filtros derivadores paso bajo, de modo que en la banda frecuencial del ECG su función de transferencia se aproxime a la de un derivador, y para frecuencias superiores se comporte como filtro paso bajo. Estos filtros presentan un gran interés ya que la derivada de la señal proporciona valiosa información sobre los puntos significativos de ésta. Sin embargo, un derivador convencional, a altas frecuencias tiene una gran ganancia que puede amplificar excesivamente el ruido, por lo que interesa modificarlo para que presente comportamiento paso bajo en dicho rango de frecuencias. Filtros que aproximen este comportamiento pueden ser diseñados con diversos criterios. En este capítulo se presenta un método de síntesis de estos filtros basado en el espectro de la señal ECG y del ruido en ella presente. Estos derivadores serán aplicados en capítulos posteriores cuando la información relevante sea suministrada por la derivada de la señal.
- 2. Definición de puntos significativos del ECG.** Como ya se ha considerado con anterioridad, un segundo paso en todo procesado de la señal ECG es el reconocimiento de cada latido y ello se realiza a través de un detector de QRS. En el tercer capítulo se presenta un detector de QRS pensado específicamente para medir el intervalo QT en registros de Holter. Una vez definida la posición de cada latido cardíaco, se considera la definición del intervalo QT. Para ello se propone una técnica de definición de inicios y finales de las ondas del ECG y, en particular, del inicio de la onda Q y del final de la onda T como puntos límite del intervalo QT. Los resultados obtenidos por este método son validados con medidas manuales realizadas por un experto, resultando ambos de precisión comparable. También se presenta otro detector de QRS más robusto, que opcionalmente incorpora una selección de latidos, de modo que son rechazados

aquellos especialmente ruidosos o ectópicos.

3. **Medida automática del intervalo QT.** En el capítulo 4, y con el método desarrollado previamente para medir automáticamente el intervalo QT, se realiza un estudio sobre su significación y validez para clasificar pacientes postinfarto de miocardio que tienen mayor tendencia a desarrollar arritmias ventriculares malignas respecto de aquellos que no presentan esta tendencia. Para ello se mide el intervalo QT en registros Holter pertenecientes a diferentes grupos de pacientes y se consideran distintas formas de analizar los resultados en función de su significación, dado el gran interés clínico que tiene la prevención de estas arritmias malignas.
4. **Detección de instantes de ocurrencia en el ECG.** En el capítulo 3 se ha considerado la definición de puntos significativos que definen el comienzo y el fin de determinadas ondas. En otras ocasiones, lo que resulta interesante es conocer los instantes de ocurrencia de la onda como un todo, para a partir de estos puntos realizar otros procesados, como promediados o estudios de las variaciones temporales de intervalos. En el capítulo 5 se considera un estimador de tiempo de retardo entre señales transitorias repetitivas como método para definir estos puntos de ocurrencia de las distintas ondas del ECG. La inevitable presencia de ruido en la señal ECG hace que estos estimadores presenten errores. En este capítulo 5 se realiza un estudio teórico, validado en simulación, del efecto del ruido sobre la estimación, viéndose cual es la dependencia del error (media y desviación tipo) con la SNR de la señal y demás parámetros propios de ella. Por último se propone un método basado en este estimador para la determinación precisa de la distancia entre las distintas ondas del ECG.
5. **Procesado adaptativo de la señal ECG.** El capítulo 6 está dedicado al estudio de procesados adaptativos para el caso en que las interferencias o ruido presenten un espectro solapado con el de la señal. Esta es una situación bastante común en el ECG que limita muchos de los procesados anteriormente considerados. Dado que la señal ECG presenta un comportamiento transitorio recurrente, se propone un esquema adaptativo general para procesado de este tipo de señales, en el supuesto que se conozca el instante de aparición de la señal. Este esquema se puede aplicar para realizar un filtrado adaptativo de cada onda del ECG que elimine el

ruido no correlado con cada recurrencia, y, por tanto, desligado de la actividad cardiaca. En concreto, se propone su particularización para el filtrado de las ondas del ECG cuando se desea la detección de potenciales tardíos en señales ECG de alta resolución. También se propone, con el mismo esquema, un modelado adaptativo del complejo QRS monitorizando sus variaciones temporales, así como permitiendo su clasificación según su forma.

Capítulo 2

FILTROS DERIVADORES PARA SEÑALES BIOLÓGICAS

2.1 Introducción

Muchas veces, en el procesado de señales biológicas, se necesita obtener la derivada de una señal, ya que ésta contiene la información asociada a cambios rápidos en las señales. Estas modificaciones, en señales biológicas, suelen tener que ver con fenómenos fisiológicos de interés, de los cuales puede convenir: detectar el momento en el que ocurren, medir su intensidad, medir su duración, etc (Pahlm y Sörnmo, 1984; Andrews y Jones, 1976; Lesh y otros, 1979; Gasser y otros, 1986).

La obtención de la derivada de una señal se realiza a través de filtros digitales cuya función de transferencia se aproxima lo más posible a la ideal. No obstante, los requisitos que deben cumplir los algoritmos derivadores vienen impuestos por las características de las señales biológicas. Estas generalmente constan de componentes de baja frecuencia contaminadas por ruido de diferente origen: ruido procedente de fuentes biológicas diferentes a la de nuestra consideración (Webster, 1978), ruido procedente de los aparatos de medida e interferencias de 50/60 Hz (Tompkins y Webster, 1981), y ruido de banda ancha debido a la cuantificación y conversión analógica digital de la señal, necesaria para su posterior procesado en computadores digitales (Oppenheim y Schaffer, 1975). Las componentes del ruido de alta frecuencia, para las cuales un

derivador convencional tiene mayor ganancia, son amplificadas por la operación de diferenciación. Este hecho hace que muchas veces el resultado de la diferenciación quede enmascarado por un elevado ruido (Marble y otros, 1981).

Para evitar la amplificación del ruido a altas frecuencias, y dado que las señales biológicas son generalmente de banda limitada, se usan filtros derivadores paso bajo (LPD)¹ (Pan y Tompkins, 1985; Pahlm y Sörnmo, 1984; Usui y Amidror, 1982) en lugar de derivadores de banda completa. La mayor parte de las señales biológicas presentan una relación señal-ruido (SNR)² no superior a 60 dB (Usui y Amidror, 1982). Ello requiere una precisión equivalente de tres dígitos en el sistema decimal, lo que puede obtenerse con un número de bits entre 10 y 12. Esto permite usar algoritmos con coeficientes enteros, en lugar de con coma flotante, sin pérdida de precisión en el cálculo y con mayor rapidez y sencillez.

Los filtros LPD pueden llevarse a cabo en dos etapas, primero se aplica un filtro paso bajo y luego uno derivador en cascada (Pan y Tompkins, 1985; Pahlm y Sörnmo, 1984). Este procedimiento supone duplicar los cálculos respecto a una sola operación de filtrado que conllevaría un solo filtro derivador paso bajo. Otra posibilidad es aplicar un solo filtro LPD, que combine el efecto derivador y paso bajo. Este planteamiento ha sido estudiado y puesto en práctica en diferentes casos (Usui y Amidror, 1982; Hamming, 1977). Estos autores proponen una técnica de diseño de filtros LPD en función del LPD ideal en cada caso concreto.

Una consideración importante a la hora de sintetizar un filtro en general, y en concreto un LPD, es la distorsión de fase (Kohn, 1987). Este problema es importante si, como a menudo sucede en señales biológicas, se está interesado en el instante de ocurrencia, o en la amplitud de determinados picos. Para evitar este problema se consideran filtros de respuesta impulsional finita (FIR)³ y simétricos, los cuales no introducen distorsión de fase en la banda de paso. Además, estos filtros no presentan problemas de estabilidad. (Bose, 1985).

Los métodos generalmente usados para diseñar LPD tienen en cuenta el espectro en

¹En inglés "Low-pass differentiators"

²En inglés "Signal-to-noise ratio"

³En inglés "Finite impulse response"

frecuencia del ruido y de la señal sobre la que van a ser aplicados. Estos métodos parten del comportamiento ideal del filtro, e intentan aproximarse a él según unos criterios que no consideran la información global del espectro del ruido ni de señal sobre la que serán aplicados. Este planteamiento, desde el punto de vista del diseño de filtros en general, es lógico ya que no se conocen *a priori* las características de la señal y del ruido. En señales biológicas generalmente se conoce el espectro de la señal y del ruido a partir de estudios experimentales previos sobre un gran número de registros reales (Thakor y otros, 1984b). En estos casos, el diseño de LPD específicos para un tipo de señales podría ser optimizado a partir del conocimiento de la señal y del ruido.

En este capítulo se presenta un método general para determinar los coeficientes de un filtro FIR LPD de una sola etapa (Laguna y otros, 1990b). Este método tiene en cuenta tanto la forma del espectro de la señal y del ruido sobre los que actuará el filtro, caso de ser posible conocerlos *a priori*, como la aplicación concreta a la que se orienta el procesado de la señal en cada caso. A continuación se aplica esta técnica al tratamiento de la señal ECG en los siguientes supuestos: identificar la morfología de la señal original, maximizar la relación señal-ruido y enfatizar unas ondas respecto de otras en el ECG. En concreto, se han diseñado filtros LPD para los cinco casos siguientes:

1. Identificación de la morfología del complejo QRS
2. Identificación de la morfología de las ondas P y T
3. Detección del QRS inmerso en ruido
4. Detección de las ondas P y T inmersas en ruido
5. Enfatizado de la onda P y T respecto del QRS

Por último se considera la extensión de esta técnica de diseño a otros tipos de filtros, tales como paso bajo y paso alto.

2.2 Diseño del filtros LPD para señales de espectro conocido

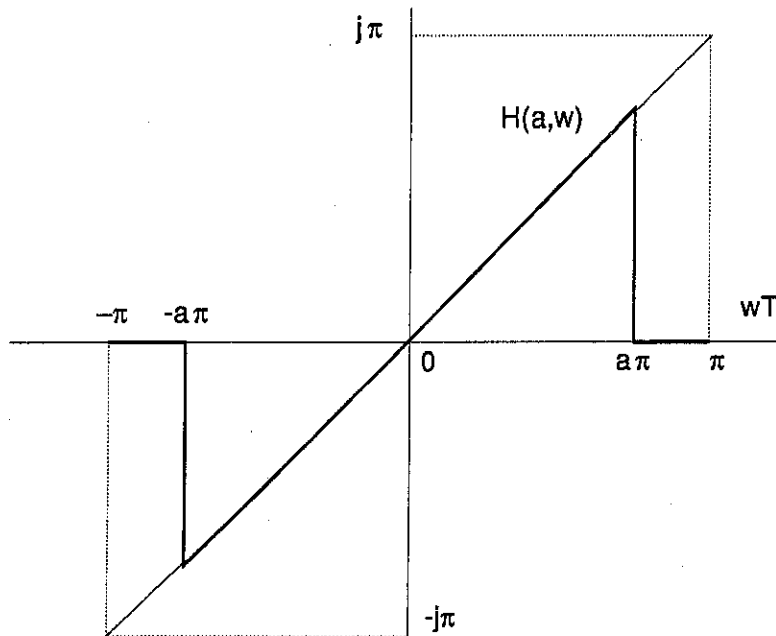


Figura 2.1: Respuesta frecuencial del filtro LPD ideal para un parámetro de corte a arbitrario ($0 < a < 1$)

La respuesta frecuencial ideal de un filtro LPD (Fig. 2.1) viene definida por

$$H(a, \omega) = \begin{cases} j\omega & |\omega| \leq a\pi \\ 0 & a\pi < |\omega| \leq \pi \end{cases}, \quad (2.1)$$

donde $a\pi$, con $0 < a < 1$, denota el límite superior de la banda de diferenciación y j es la unidad imaginaria compleja. Por simplicidad se considera el intervalo de muestreo de la señal (T) igual a la unidad de tiempo, $T = 1$. De este modo, el espectro $H(a, \omega)$ tiene una periodicidad 2π y puede realizarse su estudio en el intervalo $(-\pi, \pi)$ de forma genérica e independiente de la frecuencia de muestreo (f_m), salvo cuando se considera el espectro de una señal concreta. El parámetro a es función de la frecuencia de corte que se considera para el filtro LPD (f_c^*) y del periodo de muestreo T . El valor de a puede deducirse a partir de la relación:

$$a\pi = 2\pi f_c^* T, \quad (2.2)$$

de donde se obtiene

$$a = 2 \frac{f_c^*}{f_m} \quad (2.3)$$

donde f_m es la frecuencia de muestreo, $f_m = 1/T$.

El filtro ideal $H(a, \omega)$ es una función periódica antisimétrica de ω . Por tanto se puede expresar a través del desarrollo en series de Fourier como

$$H(a, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C'_{n_a} \exp(jn\omega). \quad (2.4)$$

Alternativamente se puede considerar otro desarrollo en serie de $H(a, \omega)$ sobre la misma base desfasada $\omega/2$, $\exp(j(n - 1/2)\omega)$. En este caso, los coeficientes del nuevo desarrollo serán distintos y $H(a, \omega)$ podrá expresarse en la forma:

$$H(a, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C'_{n_a} \exp(j(n - 1/2)\omega). \quad (2.5)$$

Los coeficientes C'_{n_s} y C'_{n_a} son los coeficientes del filtro ideal, los cuales tienen una dependencia implícita con el parámetro a .

Dado que $H(a, \omega)$ es una función antisimétrica (figura 2.1), el desarrollo de Fourier queda reducido a los términos en las funciones seno. Truncando estos desarrollos en los N primeros elementos de la serie se tienen unas aproximaciones al filtro ideal $H(a, \omega)$, que se denominarán $F_s(\omega)$ y $F_a(\omega)$ respectivamente para cada desarrollo. Los filtros FIR obtenidos con este número finito N de coeficientes se expresan como

$$F_s(\omega) = j \sum_{n=1}^N C_{n_s} \sin(n\omega) \quad (2.6)$$

$$F_a(\omega) = j \sum_{n=1}^N C_{n_a} \sin((n - 1/2)\omega) \quad (2.7)$$

donde C_{n_s} y C_{n_a} son los coeficientes de los filtros aproximados. Estos dos filtros se denominarán simétrico (F_s) y antisimétrico (F_a), y los subíndices s y a se referirán siempre a estas configuraciones.

Las expresiones de las señales de salida de estos filtros en el dominio del tiempo, para señales muestreadas, pueden calcularse a través de la transformada en z y se denominarán $Y_s(k)$ y $Y_a(k)$ respectivamente:

$$Y_s(k) = \frac{d}{2} \sum_{n=1}^N \bar{C}_{n_s} [X(k+n) - X(k-n)] \quad \text{con} \quad d \cdot \bar{C}_{n_s} = C_{n_s} \quad (2.8)$$

$$Y_a(k) = \frac{d}{2} \sum_{n=1}^N \bar{C}_{n_a} [X(k+n) - X(k-n+1)] \quad \text{con} \quad d \cdot \bar{C}_{n_a} = C_{n_a} \quad (2.9)$$

El parámetro d es un factor de escala que hace que los coeficientes \bar{C}_{n_s} y \bar{C}_{n_a} tengan valores enteros. $X(k)$ es la señal de entrada al filtro muestreada en el instante de tiempo k e $Y_s(k)$ y $Y_a(k)$ son sus salidas en el mismo instante de tiempo. Como puede deducirse de las expresiones temporales, F_s no introduce retardo en la señal de salida, mientras que F_a introduce un retardo de medio periodo de muestreo.

Los filtros F_s y F_a cubren todas las posibilidades de filtros FIR LPD de fase lineal, con coeficientes (\bar{C}_n) enteros y directamente realizables, salvo configuraciones que difieren de éstas en un retardo puro adicional que no afecta a la respuesta en frecuencia del filtro. Esto puede deducirse de la expresión (2.5), donde pueden considerarse índices $(n-r)$ diferentes de $(n-1/2)$. Si r es un entero, esto produce un retardo puro de r periodos de muestreo sobre el mismo F_s . Si r no es entero pero $2r$ sí que lo es, se tiene el filtro F_a con un retardo de $r - 1/2$ muestras enteras. Cualquier otro valor de r produce filtros que no son directamente realizables, dado que se requeriría conocer el valor de la señal en instantes de tiempo diferentes a los de muestreo, y ésto no es posible en señales muestreadas de forma periódica.

En adelante se usará la notación F , Y , y C_n para referirse de forma genérica a cualquiera de las dos formas, simétrica o antisimétrica. Se recuperará la notación particularizada cuando sea necesario especificar cada caso.

Se presentan dos técnicas de diseño de filtros LPD para identificación de la morfología y mejora de la SNR. Estas tienen en cuenta una función de error entre el derivador real y el aproximado.

2.2.1 Diseño de LPD para identificación de la morfología

Muchas veces el interés de calcular la derivada está en su utilidad para definir la morfología de una señal a través de la detección de sus puntos característicos (máximos, mínimos, puntos de máxima inflexión, etc). Para poder realizar ésto sin distorsiones se necesitaría que la salida del filtro derivador fuera la derivada ideal de la señal, $j\omega S(\omega)$, en la banda de paso de la señal y cero en la banda de atenuación. Es decir, la salida ideal sería $H(a, \omega)S(\omega)$, donde a viene definida por la frecuencia de corte de la señal f_c . Este comportamiento ideal se aproxima a través del filtro LPD real $F(\omega)$ cuya salida es $F(\omega)S(\omega)$. Para conseguir que esta aproximación sea lo mejor posible, se debe intentar que la diferencia entre $H(a, \omega)$ y $F(\omega)$ sea mínima, especialmente a frecuencias donde $\omega S(\omega)$ toma los mayores valores.

Como ya se ha comentado en la introducción a este capítulo, frecuentemente se puede conocer una estimación del espectro de las señales biológicas. Esta estimación se realiza a partir de estudios experimentales previos sobre registros reales de señal.

En el planteamiento siguiente se supondrá que es posible conocer *a priori* el espectro de la señal $S(\omega)$. Este espectro es de banda limitada y se extenderá hasta la frecuencia de corte de la señal (f_c). Se supondrá también que el espectro del ruido $N(\omega)$ que contamina la señal puede ser conocido previamente de forma análoga. La frecuencia de muestreo f_m será tal que cumpla el teorema de Shannon o del muestreo (Oppenheim y Schafer, 1975), es decir $f_m \geq 2f_c$.

Con éstas consideraciones, se define el error cuadrático $E(a)$ como

$$E(a) = \int_{-\pi}^{\pi} |H(a, \omega) - F(\omega)|^2 W(\omega) d\omega, \quad (2.10)$$

donde $W(\omega)$ es un factor de peso definido en función del espectro de la señal en la banda de paso y del ruido en la banda de atenuación.

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega S(\omega)}{S_0} & |w| < a\pi \\ \frac{N(\omega)}{N_0} & a\pi < |w| < \pi \end{cases} \quad (2.11)$$

S_0 y N_0 son dos factores de normalización que valen

$$S_0 = \int_{-a\pi}^{a\pi} \omega S(\omega) d\omega \quad (2.12)$$

y

$$N_0 = \int_{-\pi}^{-a\pi} N(\omega) d\omega + \int_{a\pi}^{\pi} N(\omega) d\omega. \quad (2.13)$$

Los coeficientes (C_1, C_2, \dots, C_N) del filtro $F(\omega)$ se definen como aquellos que minimizan $E(a)$. De este modo se conseguirá aproximar $F(\omega)$ a $H(a, \omega)$, dando más importancia, y por tanto corrigiendo en mayor grado, al error que existe en aquellas frecuencias donde la señal tiene más contribución. Estos coeficientes C_n serán obviamente distintos para cada parámetro a y función, por tanto, de la frecuencia de corte de la señal. Con la normalización propuesta del factor de peso $W(\omega)$, se ve que se cumple la siguiente relación

$$\int_{-a\pi}^{a\pi} W(\omega) d\omega = \int_{-\pi}^{-a\pi} W(\omega) d\omega + \int_{a\pi}^{\pi} W(\omega) d\omega = 1, \quad (2.14)$$

con ello se asegura que el error que existe entre $F(\omega)$ y $H(a, \omega)$ recibe la misma importancia, o peso total, en la banda de paso $(-a\pi, a\pi)$ que en la de atenuación $(-\pi, -a\pi) \cup (a\pi, \pi)$. Esta consideración es importante, dado que generalmente $a < \frac{1}{2}$ para evitar problemas de *aliasing*, y sin esta redistribución del peso se podría hacer una aproximación precisa de la parte paso bajo del filtro, pero bastante peor de la parte derivada.

Generalmente el espectro de la señal $S(\omega)$ es una función continua de ω , de la cual se desea conocer su expresión analítica para poder minimizar $E(a)$. Dado que el conocimiento de $S(\omega)$ proviene de trabajos experimentales, no es fácil obtener una función matemática que represente con la suficiente precisión a $S(\omega)$. Para resolver este punto se considerará $S(\omega)$ aproximado por una función en m tramos lineales, siendo m suficientemente grande para obtener una buena aproximación a $S(\omega)$. De este modo, la expresión (2.10), que define el error $E(a)$, se convierte en una expresión analítica de segundo orden en los coeficientes C_n del filtro $F(\omega)$, y conserva su dependencia con el parámetro a :

$$E(a) = E(a, C_1, C_2, \dots, C_N, C_1^2, C_2^2, \dots, C_N^2). \quad (2.15)$$

La minimización de $E(a)$ sin ninguna restricción no implica que el derivador para bajas frecuencias tenga un comportamiento próximo al ideal. Para asegurar el comportamiento como derivador ideal cuando $\omega \rightarrow 0$ (Usui y Amidror, 1982) se impone la restricción de que en el origen $F(\omega)$ tienda asintóticamente a $H(a, \omega)$

$$\left. \frac{dF(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0} = j \quad (2.16)$$

Imponiendo esta condición en las ecuaciones (2.6) y (2.7) se obtiene una restricción para los N coeficientes, tanto para la configuración simétrica C_{n_s} como para la antisimétrica C_{n_a} , que viene dada por las siguientes ecuaciones.

$$\sum_{n=1}^N n C_{n_s} = 1 \quad (2.17)$$

$$\sum_{n=1}^N (n - \frac{1}{2}) C_{n_a} = 1. \quad (2.18)$$

Esta condición hace que sólo $N - 1$ coeficientes sean independientes y que se pueda expresar C_N como combinación de los $N - 1$ anteriores

$$C_N = C_N(C_1, C_2, \dots, C_{N-1}), \quad (2.19)$$

en concreto

$$C_{N_s} = \frac{(1 - \sum_{n=1}^{N-1} n C_{n_s})}{N} \quad (2.20)$$

y

$$C_{N_a} = \frac{(1 - \sum_{n=1}^{N-1} (n - \frac{1}{2}) C_{n_a})}{N - \frac{1}{2}}. \quad (2.21)$$

Sustituyendo esta relación entre los coeficientes en la expresión del error $E(a)$ dado en la ecuación (2.15) se obtiene

$$E(a) = E(a, C_1, C_2, \dots, C_{N-1}, C_1^2, C_2^2, \dots, C_{N-1}^2). \quad (2.22)$$

Esta es la expresión del error que se ha de minimizar. Para ello se debe resolver un sistema de $N - 1$ ecuaciones con $N - 1$ incógnitas que resultan de derivar $E(a)$ respecto a cada uno de los $N - 1$ coeficientes C_n , e igualar a cero

$$\frac{\partial E(a)}{\partial C_i} = E_i(a, C_1, \dots, C_{N-1}) = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, N - 1. \quad (2.23)$$

Resolviendo este sistema y usando la relación entre coeficientes expresada en (2.19) se obtiene un conjunto N de coeficientes reales C_n que definen el filtro $F(\omega)$. Para comprobar que efectivamente esta solución es un mínimo de $E(a)$ se calcula la derivada segunda de $E(a)$ respecto de cada una de los $N - 1$ coeficientes C_n . Sustituyendo en (2.10) el valor de $F_s(\omega)$ y la ligazón de coeficientes (2.19), se obtiene la siguiente expresión del error para el caso simétrico

$$E(a) = \int_{-\pi}^{\pi} \left| H(a, \omega) - j \left(\sum_{n=1}^{N-1} C_n \sin(n\omega) + \frac{1 - \sum_{n=1}^{N-1} n C_n}{N} \sin(N\omega) \right) \right|^2 W(\omega) d\omega, \quad (2.24)$$

y calculando la derivada segunda se tiene

$$\frac{\partial^2 E(a)}{\partial^2 C_n} = \int_{-\pi}^{\pi} \left[2 \sin^2(n\omega) + \frac{2n^2 \sin^2(N\omega)}{N^2} - \frac{4n \sin(n\omega) \sin(N\omega)}{N} \right] W(\omega) d\omega \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial^2 E(a)}{\partial^2 C_n} = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sqrt{2} \sin(n\omega) - \frac{\sqrt{2}n}{N} \sin(N\omega) \right]^2 W(\omega) d\omega. \quad (2.26)$$

Dado que $W(\omega)$ esta definido positivo para toda ω , se deduce que efectivamente

$$\frac{\partial^2 E(a)}{\partial^2 C_n} > 0 \quad \forall n \quad n = 1, \dots, N - 1 \quad (2.27)$$

y por tanto el conjunto de los N coeficientes C_n , obtenidos de la resolución de (2.23) hacen mínimo $E(a)$. Análogamente se puede demostrar para el caso antisimétrico con $F_a(\omega)$. A este error mínimo se le denominará $E_m(a)$.

Así se ha definido un conjunto de coeficientes reales C_n que aproximan la salida del filtro a la derivada ideal de la señal. Esta aproximación está condicionada por el orden

N del filtro usado y por la propia definición de la función de error $E(a)$. En este caso $E(a)$ ha sido definido a través de $W(\omega)$, de modo que la morfología de la señal $S(\omega)$ sea modificada lo menos posible al calcular su derivada.

2.2.2 Diseño de LPD para mejorar la relación señal-ruido

En el estudio anterior no se ha considerado la presencia de ruido a frecuencias dentro de la banda de la señal. Esto se ha hecho ya que no es posible con un filtrado lineal atenuar este ruido sin distorsionar la señal en la misma medida. Por ello, cuando este ruido esté presente, el LPD proporcionará a la salida la derivada del ruido y de la señal con idéntica ganancia. Existen otras aplicaciones en el procesamiento de señales biológicas en las cuales no es tan importante obtener una fiel reproducción de la morfología de la señal, como conseguir la máxima mejora de la relación señal-ruido (SNR), por ejemplo en la detección de presencia de señal.

Se puede definir una SNR a la salida del filtro en función del LPD ideal, (SNR_H) como:

$$SNR_H = \frac{\int_0^\pi S(\omega)H(a, \omega) d\omega}{\int_0^\pi N(\omega)H(a, \omega) d\omega} \quad (2.28)$$

SNR_H es una función de a , por tanto se puede maximizar respecto a este parámetro. Conocido el valor de a que maximiza SNR_H ($a = a_0$) se puede determinar la frecuencia de corte del filtro ideal f_c^* , mediante (2.3).

Esta definición de SNR está hecha en función del filtro ideal $H(a, \omega)$, pero en la realidad se cuenta con una aproximación a él, $F(\omega)$. Por tanto parece más lógico definir otra SNR_F en función de $F(\omega)$

$$SNR_F = \frac{\int_0^\pi |S(\omega)F(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^\pi |N(\omega)F(\omega)|^2 d\omega} \quad (2.29)$$

En esta definición se usa el cuadrado, ya que $F(\omega)$ puede ser positivo y negativo, y de este modo se hace que la contribución de todo el espectro a SNR_F sea positiva. El maximizar esta expresión de SNR_F respecto de los $N - 1$ coeficientes del filtro $F(\omega)$ supone resolver un sistema de $N - 1$ ecuaciones de tercer orden con $N - 1$ incógnitas.

Dada la dificultad de resolución analítica de estas expresiones, se propone calcular los coeficientes C_n haciendo uso de la SNR_H . Maximizando SNR_H se obtiene a_0 como el parámetro que mejor SNR produce a la salida del filtro si se tuviera el derivador ideal. Una vez determinado este parámetro a_0 , se minimiza $E(a_0)$ como se ha descrito en el apartado anterior, y se obtiene un conjunto de coeficientes C_n resolviendo (2.23), resultando así éste un caso particular del método presentado en el apartado anterior. Finalmente se obtiene una aproximación entera de los coeficientes C_n tal que maximice SNR_F .

2.2.3 Selección y aproximación entera de los coeficientes del LPD

Por el procedimiento descrito anteriormente se obtiene un conjunto de N coeficientes C_1, C_2, \dots, C_N , que minimizan el error $E(a)$. Una de las limitaciones de un filtro FIR, en cuanto a cálculo se refiere, es el número de coeficientes con que trabaja. Con el procedimiento expuesto anteriormente se minimiza el error $E(a)$ con los N primeros coeficientes $n = 1, 2, \dots, N$. Con la restricción de usar N coeficientes, no se puede asegurar que sean los N primeros términos del desarrollo de $F(\omega)$ los que mejor aproximen $H(a, \omega)$. Esto puede visualizarse considerando señales de baja frecuencia respecto a la de muestreo f_m , lo que implica un valor pequeño de a . Ello a su vez requiere órdenes n grandes en los términos $C_n \sin(n\omega)$ del desarrollo de $F(\omega)$ para que el efecto paso bajo (caída de la función seno) se de a frecuencias próximas a $a\pi$ (figura 2.1). Nótese que $F(\omega)$ es el desarrollo de Fourier de la función de transferencia ideal $H(a, \omega)$ y un a pequeño supone altas frecuencias en esta función vista como una función cualquiera de variable ω .

En general, una minimización de $E(a)$ con un número suficientemente grande P de coeficientes C_i , ($i = 1, \dots, P$) dará un subconjunto de N coeficientes C_{r_i} , ($i = 1, \dots, N$), siendo $N < P$, los cuales tienen los valores más altos. En este caso, seleccionando estos N coeficientes, que ya no tienen porque corresponder a los N primeros términos del desarrollo de $H(\omega)$, y minimizando $E(a)$ con un $F(\omega)$ que considere estos N términos del desarrollo, se obtendrá un nuevo conjunto de N coeficientes C_{r_i} , ($i = 1, \dots, N$), que puede dar un error $E(a)$ menor que con los N primeros términos del desarrollo de $H(a, \omega)$.

La primera minimización ha servido para definir los r_i $i = 1, \dots, N$ términos del desarrollo de $H(a, \omega)$ a considerar. Posteriormente éstos se han tomado en la segunda minimización, suponiendo que eran el mejor conjunto de N términos del desarrollo. Esto puede también no ser cierto, sobre todo si los coeficientes C_i , ($i = 1, \dots, P$), obtenidos en la primera minimización no tienen un subconjunto C_{r_i} , $i = 1, \dots, N$, claramente separados en valor de los no seleccionados. Para evitar esto se considera nuevamente la minimización de $E(a)$ para las combinaciones adyacentes $C_{r_1 \pm 1}$, $C_{r_2 \pm 1}$, ..., $C_{r_N \pm 1}$ y se toma aquélla para la cual $E_m(a)$ sea menor.

Otra aproximación es convertir el valor real de los coeficientes C_{r_i} a valores enteros, de cara a aumentar la velocidad de cálculo y dado que, según se ha comentado en la introducción, se obtiene precisión suficiente en la medida de la señal. Por otra parte, la longitud de palabra finita de que se dispone en computadores digitales impone una normalización de los coeficientes para evitar la saturación. Por ejemplo, una longitud de palabra de 16 bits, con 12 bits de resolución en el conversor analógico-digital, requiere que los coeficientes no sean mayores de $2^{16-12} = 16$. Dado que la conversión a enteros de los coeficientes y su posterior normalización alejará al error $E(a)$ del valor mínimo $E_m(a)$, es aconsejable evaluar el error para valores adyacentes de cada aproximación entera, esto es, si V_i es el *entero más próximo* a C_{r_i} , para $i = 1, \dots, N$, se debe calcular el error para valores $V_i \pm 1$ y tomar aquellos que hacen el error $E(a)$ menor.

2.3 Aplicaciones a la señal ECG

Como aplicación de las técnicas de diseño expuestas anteriormente se considerarán filtros LPD para señales ECG. Estos filtros serán utilizados como herramienta de preprocesado en capítulos posteriores. Se han considerado diferentes técnicas de diseño de filtros LPD en función de la aplicación concreta de procesado. Se presentan los LPD calculados para cinco situaciones diferentes:

1. Identificación de la morfología del QRS
2. Identificación de la morfología de las ondas P y T

3. Detección de complejos QRS
4. Detección de ondas P y T
5. Enfatizado de las ondas P y T respecto del complejo QRS

Las dos primeras aplicaciones se diseñan según la técnica expuesta para identificación de la morfología, y las tres últimas son diseñadas maximizando la SNR.

Se diseñaran filtros LPD con uno, dos y tres coeficientes, que son los que menor tiempo de cálculo consumen, y por tanto son muy útiles en el procesado de grandes cantidades de datos (registros de ECG de Holter de 24 horas). Para cada caso se verá el resultado de aplicar estos filtros a una señal ECG tomada de un registro de Holter. Se considerará en primer lugar una frecuencia de muestreo $f_m = 250$ Hz, ya que es una de las más usadas en el procesado de señales ECG de Holter. Por último se presentará una tabla con LPD calculados según este método para $f_m = 200, 250$ y 300 Hz.

El espectro de la señal se toma considerando una aproximación lineal de los espectros del complejo QRS y de las ondas P y T, dado en Thakor y otros (1984b) y reproducido en la figura 1.5 del capítulo 1. La aproximación considerada se representa en la figura 2.2 y se realiza en dos diferentes tramos lineales para frecuencias en $(0, f_1)$ y (f_1, f_c) . Usando (2.3), estas frecuencias f_1 y f_c , determinan los correspondientes intervalos en ω , $(0, a_1\pi)$ y $(a_1\pi, a\pi)$, en los cuales el espectro es lineal. Entonces, el espectro $S(\omega)$ puede expresarse como

$$S(\omega) = \begin{cases} r_1\omega + p_1 & |\omega| < a_1\pi \\ r_2\omega + p_2 & a_1\pi < |\omega| < a\pi \\ 0 & a\pi < |\omega| < \pi \end{cases} \quad (2.30)$$

Para los espectros de la figura 2.2, y utilizando una frecuencia de muestreo $f_m = 250$, Hz se obtiene:

- Espectro del complejo QRS, $QRS(\omega)$. ($f_1 = 11$ Hz , $f_c = 37$ Hz)

$$\begin{aligned} r_1 &= 1.114 & p_1 &= 0.34 \\ r_2 &= -1.036 & p_2 &= 0.97 \\ a_1 &= 0.088 & a &= 0.296 \end{aligned}$$

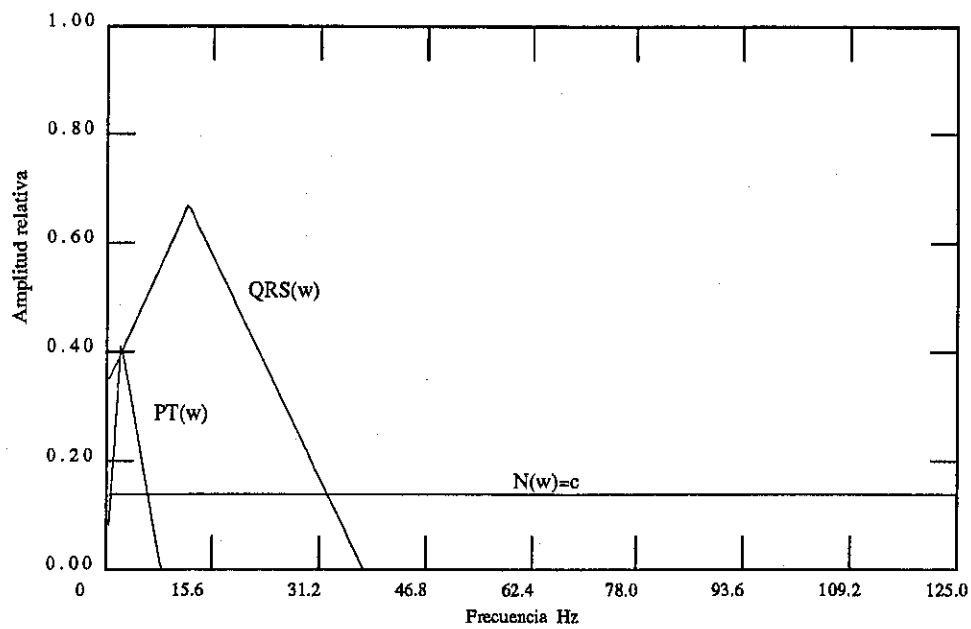


Figura 2.2: Aproximación lineal del espectro del ECG según Thakor y otros (1984b).

Para el complejo QRS los dos tramos de linealidad corresponden a las frecuencias entre 0 y 11 Hz y entre 11 y 37 Hz, respectivamente. Para las ondas P y T estos tramos van de 0 a 2 Hz y de 2 a 8 Hz.

y entonces

$$QRS(\omega) = \begin{cases} 1.114\omega + 0.34 & |\omega| < 0.088\pi \\ -1.036\omega + 0.97 & 0.088\pi < |\omega| < 0.296\pi \\ 0 & 0.296\pi < |\omega| < \pi \end{cases} \quad (2.31)$$

- Espectro de las ondas P y T, $PT(\omega)$. ($f_1 = 2$ Hz , $f_c = 8$ Hz)

$$\begin{aligned} r_1 &= 8.355 & p_1 &= 0.00 \\ r_2 &= -2.785 & p_2 &= 0.56 \\ a_1 &= 0.016 & a &= 0.064 \end{aligned}$$

y entonces

$$PT(\omega) = \begin{cases} 8.355\omega & |\omega| < 0.016\pi \\ -2.785\omega + 0.56 & 0.016\pi < |\omega| < 0.064\pi \\ 0 & 0.064\pi < |\omega| < \pi \end{cases} \quad (2.32)$$

Para tener una idea cualitativa de la verosimilitud de estas aproximaciones, se ha recuperado la señal temporal a partir de estos espectros lineales a tramos suponiendo que la señal es:

- Simétrica, con lo cual el espectro es real y coincide con $QRS(\omega)$ o $PT(\omega)$.
- Periódica, con una periodicidad de un segundo, de modo que el espectro se puede tomar discreto.
- muestreada a 250 Hz.

La morfología de la señal recuperada en estas condiciones se muestra en la figura 2.3a para el complejo QRS y en la 2.3b para las ondas P y T. En ambos casos se ve que esta morfología puede asimilarse con la tipo de un complejo QRS o una onda P ó T.

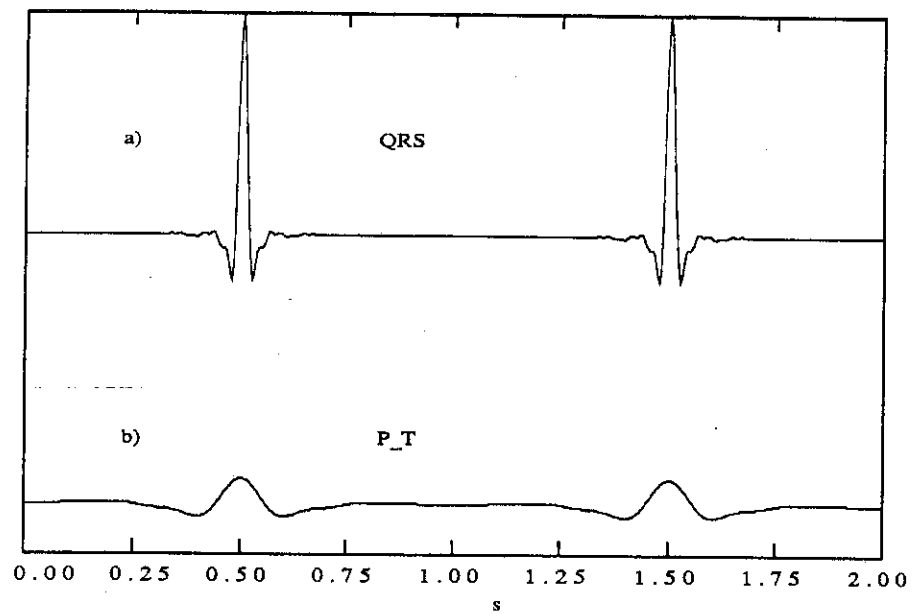


Figura 2.3: Señales temporales recuperadas a partir de los espectros de la figura 2.2.

a) Señal QRS supuesta simétrica, periódica con periodicidad de un segundo y muestreada a 250 Hz. b) Señal correspondiente a una onda P ó T recuperada según a).

2.3.1 Identificación de la morfología del QRS

Se considerará el espectro aproximado del QRS, $S(\omega) = QRS(\omega)$, descrito previamente, y se aplicará el procedimiento de diseño expuesto en 2.2.1. El ruido $N(\omega)$ se supone blanco, $N(\omega) = c$, siendo c la amplitud del espectro $N(\omega)$. Esta suposición es correcta en la medida que este ruido provenga mayoritariamente de la señal biológica muscular y del ruido de banda ancha de los aparatos de medida. En estos casos puede ser aproximado como blanco (Thakor y otros, 1984b).

El factor de peso $W(\omega)$ se define como

$$W(\omega) = \begin{cases} 2(\pi - a\pi)[\omega QRS(\omega)/QRS_0] & |\omega| < a\pi \\ 1 & \pi > |\omega| > a\pi \end{cases} \quad (2.33)$$

Este factor de peso ha sido multiplicado, respecto a la ecuación (2.11), por un factor $2(\pi - a\pi)$ para simplificar los cálculos.

Se considera el diseño de tres filtros LPD con 1, 2 y 3 coeficientes, y con un máximo valor entero para los coeficientes de 10. Los filtros óptimos así diseñados para identificación de la morfología del QRS se denominarán QRS-M₁, QRS-M₂ y QRS-M₃ para 1, 2 y 3 coeficientes, respectivamente. Operando según se ha descrito en los apartados 2.2.1 y 2.2.3 se obtienen los filtros expuestos en la tabla 2.1.

En esta tabla, los subíndice s y a de los coeficientes indican si éstos corresponden a la configuración simétrica o antisimétrica, dado que se ha tomado la que menor error $E(a)$ daba en cada caso. El parámetro d se ha calculado a partir de los coeficientes C_n del filtro y de las ecuaciones (2.8) ó (2.9).

En esta misma tabla puede observarse como $E(a)$ decrece conforme se incrementa el número de coeficientes del filtro. Los filtros que ocasionan menor $E(a)$ con 1 y 2 coeficientes no están formados por el primer coeficiente (C_1) y primer y segundo coeficientes (C_1, C_2), sino por otros de mayor orden (C_3) y (C_2, C_3), respectivamente. Esto confirma la consideración hecha en el apartado 2.2.3 al respecto del mejor conjunto de N coeficientes para minimizar $E(a)$.

En la figura 2.4 pueden verse las funciones de transferencia de estos filtros QRS-M_{*i*}, donde se observa que cuando $\omega \rightarrow 0$ entonces QRS-M_{*i*}(ω) tienden a $H(\omega)$. Ordenes

QRS-M _i			
LPD	d	$(\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3)_{s,a}$	$E(a)$
QRS-M ₁	$\frac{1}{2.5}$	$(0,0,1)_a$	0.528
QRS-M ₂	$\frac{1}{4}$	$(0,1,1)_a$	0.275
QRS-M ₃	$\frac{1}{37}$	$(6,8,5)_s$	0.225

Tabla 2.1: Filtros LPD para identificación de la morfología del QRS.

Se presentan los coeficientes de los filtros (QRS-M_i, $i = 1, 2$ y 3), el parámetro d y error $E(a)$. El subíndice (s, a) indica si estos filtros pertenecen a la configuración simétrica o antisimétrica.

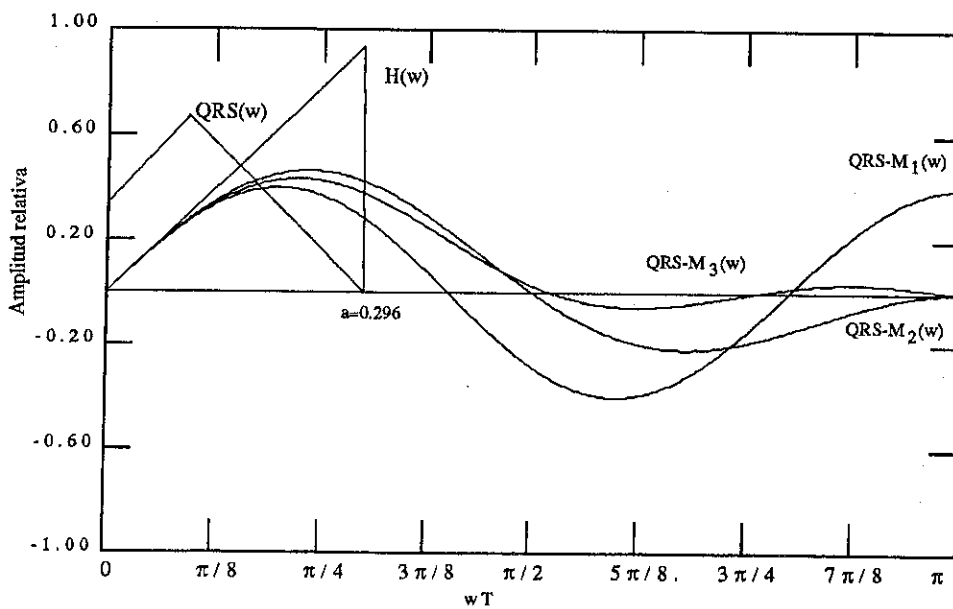


Figura 2.4: Respuesta frecuencial para los filtros QRS-M_i(ω) ($i = 1, 2$ y 3), el derivador ideal $H(\omega)$ para QRS, y el espectro aproximado QRS(ω), del QRS.

mayores de i aproximan mejor el filtro ideal y además las mayores diferencias con éste se dan donde el espectro de potencia de $QRS(\omega)$ es menor.

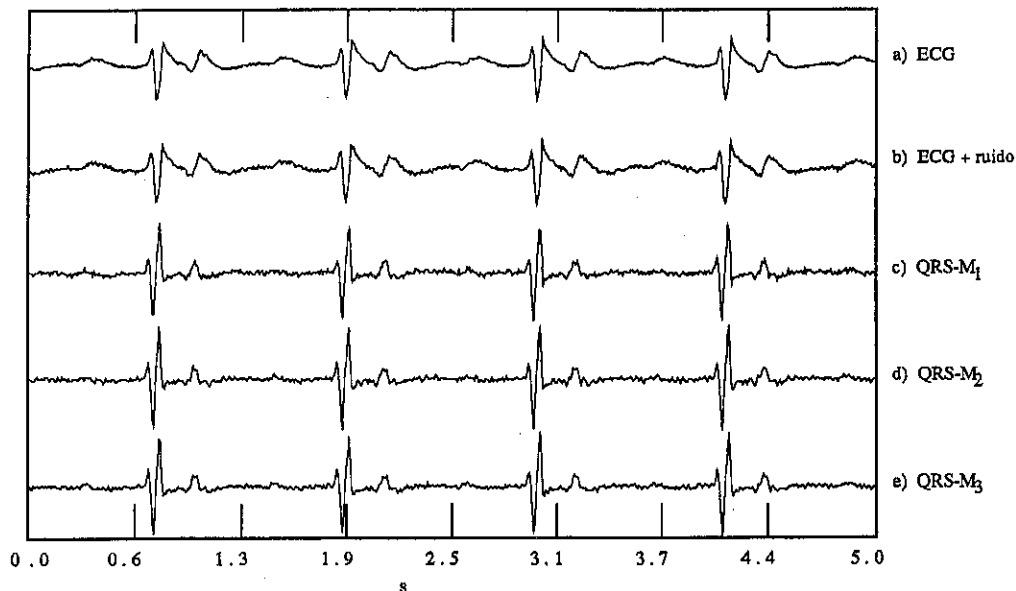


Figura 2.5: Aplicación de los filtros $QRS-M_i$ sobre un registro de ECG real.

Se toma un ECG real (a), al cual se le ha añadido ruido blanco generado por computador (b), con una SNR (cociente de amplitudes máximas) de 23.5. Las salidas de cada $QRS-M_i$ son c), d) y e), respectivamente.

En la figura 2.5 se puede ver un QRS real, obtenido de la señal ECG de un registro Holter, a la cual se le ha añadido ruido blanco generado por computador. A la señal resultante se le ha aplicado cada uno de los filtros $QRS-M_i$, obteniendo de esta forma las distintas aproximaciones a la derivada del QRS. Se observa como el comienzo y fin del QRS, así como los cruces por cero, quedan mejor definidos en la señal derivada a medida que se aumenta el número de coeficientes en el filtro.

En las figuras 2.6 y 2.7 se presentan los gráficos del error mínimo $E_m(a)$ obtenido en la minimización con coeficientes reales para las configuraciones simétrica y antisimétrica, respectivamente. Los resultados han sido obtenidos utilizando una frecuencia de corte del espectro $QRS(\omega)$ igual a 37 Hz, f_m variando de 100 a 1000 Hz, y los valores de a determinados por la ecuación (2.3). Se consideran los casos para $N=2, 3$ y 4 primeros coeficientes. En estos gráficos se ha marcado el error $E(a)$ para los filtros $QRS-M_i$ con coeficientes enteros a la frecuencia de muestreo $f_m = 250$

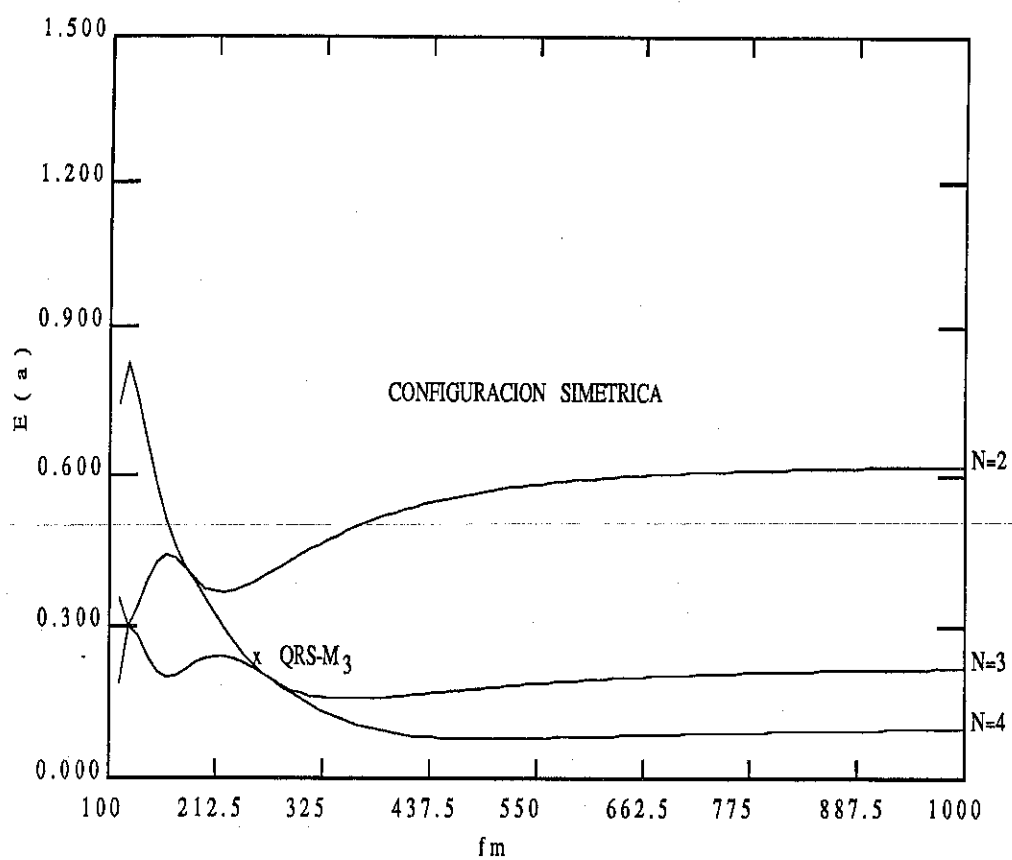


Figura 2.6: Error mínimo $E_m(a)$ (configuración simétrica) para QRS.

Las frecuencias de muestreo varían de 100 a 1000 Hz. Se considera los casos en los que el número de coeficientes N vale 2, 3 y 4. Las marcas representan $E(a)$ para los filtros $QRS-M_i$, permitiendo compararlo con $E_m(a)$ a la $f_m = 250$ Hz.

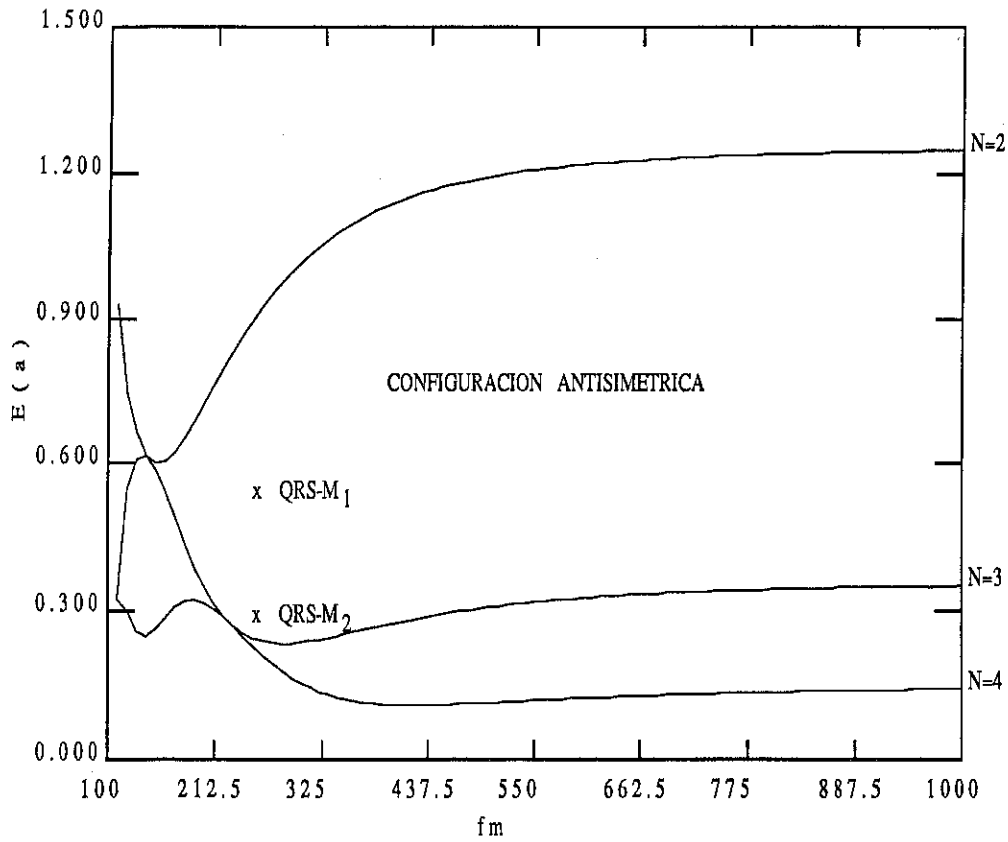


Figura 2.7: Error mínimo $E_m(a)$ (configuración antisimétrica) para QRS.

Las frecuencias de muestreo varían de 100 a 1000 Hz. Se considera los casos en los que el número de coeficientes N vale 2, 3 y 4. Las marcas representan $E(a)$ para los filtros $QRS-M_i$ permitiendo compararlo con $E_m(a)$ a la $f_m = 250$ Hz.

Hz para la que fueron calculados. Puede compararse este error $E(a)$ con el $E_m(a)$. En la figura 2.7 puede observarse como los filtros QRS- M_1 y QRS- M_2 tienen superiores prestaciones que los mejores filtros con coeficientes reales para $N = 1$ y 2. Recuérdese que QRS- M_1 tiene un coeficiente de orden 3 y QRS- M_2 tiene dos coeficientes de orden 2 y 3 (tabla 2.1).

2.3.2 Identificación de la morfología de las ondas P y T

Operando análogamente al apartado 2.3.1, pero ahora haciendo $S(\omega) = PT(\omega)$, se obtienen los filtros para identificación de la morfología de las ondas P y T. Estos filtros se denominarán PT- M_i ($i = 1, 2$ y 3) para un número i de coeficientes.

En la tabla 2.2 se muestran los filtros PT- M_i obtenidos en este caso.

PT- M_i			
LPD	d	$(\tilde{C}_9, \tilde{C}_{10}, \tilde{C}_{11}, \tilde{C}_{12})_{s,a}$	$E(a)$
PT- M_1	$\frac{1}{12}$	$(0,0,0,1)_s$	0.033
PT- M_2	$\frac{1}{20}$	$(0,1,1,0)_a$	0.020
PT- M_3	$\frac{1}{28.5}$	$(1,1,1,0)_a$	0.015

Tabla 2.2: Coeficientes de los filtros LPD para identificación de la morfología de las ondas P y T.

Se presentan: Los filtros (PT- M_i , $i = 1, 2$ y 3 coeficientes), el parámetro d y el error $E(a)$. El subíndice (s, a) indica si estos filtros pertenecen a la configuración simétrica o antisimétrica.

En la figura 2.8 se presenta el espectro de las ondas P y T $PT(\omega)$, y las funciones de transferencia del filtro ideal para ondas P y T y de los filtros PT- M_i . Nótese como dado que $a = 0.064$ es menor que en el caso del QRS ($a = 0.296$), también la función de transferencia debe aproximarse a cero para ω menores (figura 2.1). Esto implica que los coeficientes considerados pertenecen a órdenes mayores del desarrollo de $H(a, \omega)$ (tabla 2.2).

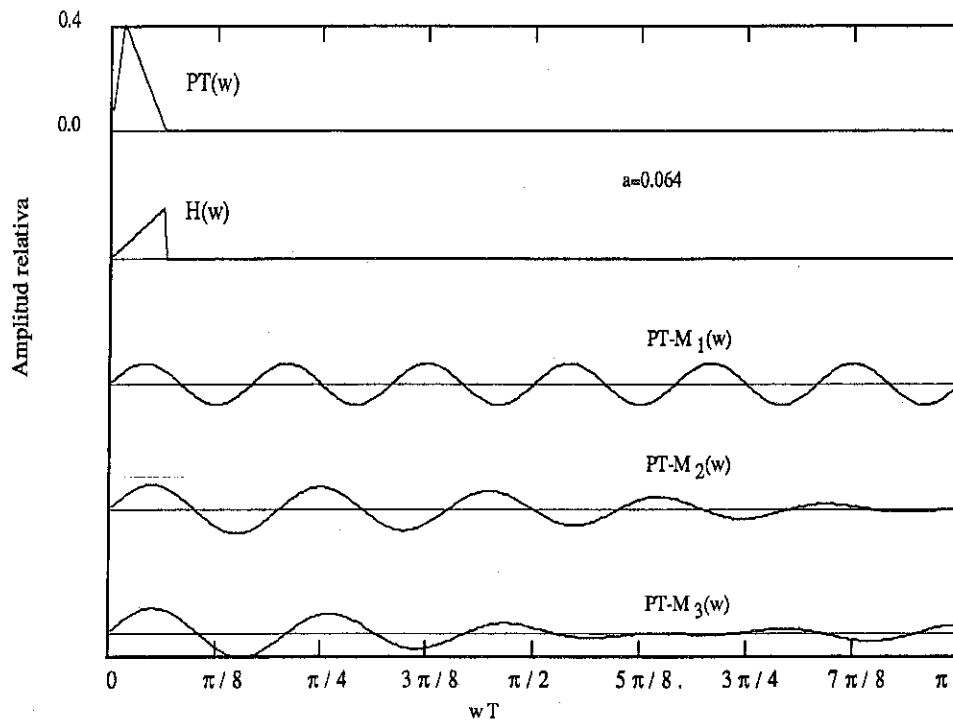


Figura 2.8: Respuesta frecuencial para el espectro aproximado de las ondas P y T, $PT(\omega)$, el derivador ideal $H(\omega)$ para ondas P y T y los filtros $PT-M_i(\omega)$ ($i = 1, 2$ y 3).

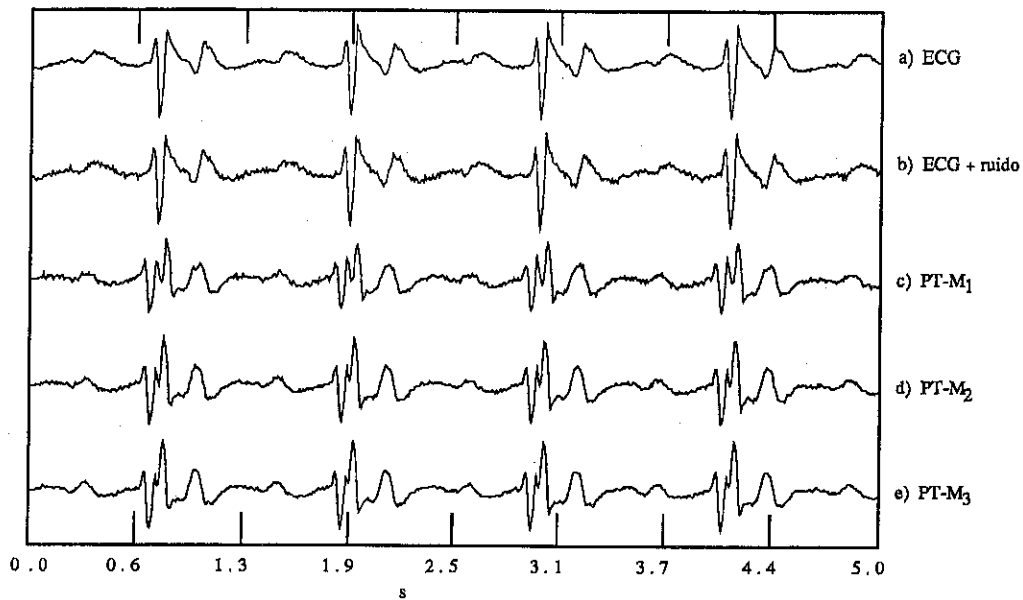


Figura 2.9: Aplicación de los filtros $PT-M_i$ sobre un registro de ECG real.

Se toma un ECG real (a), al cual se le ha añadido ruido blanco (b) con una SNR (cociente de amplitudes máximas) de 23.5. Las salidas de cada $PT-M_i$ son c), d) y e), respectivamente.

En la figura 2.9 se puede observar la señal ECG, tomada del mismo registro Holter que en la figura 2.5, con ruido blanco añadido y la salida que generan los filtros PT-M_i ante esta señal. Se puede ver como ahora se ha obtenido una precisa derivada de las ondas P y T, pero no del QRS que se ha atenuado respecto a éstas, ya que su espectro cae en la banda de atenuación considerada.

2.3.3 Detección del complejo QRS

Cuando se está interesado en la detección de una señal, el objetivo es que los procesados previos a la detección proporcionen la mayor SNR posible. Para diseñar un filtro LPD en estos casos se sigue la técnica descrita en 2.2.2. Se tomará de nuevo $S(\omega) = QRS(\omega)$ y $N(\omega) = c$, y con ello se maximizará $SNR_H(a)$ en la ecuación 2.28. De esta forma se obtiene el valor a_0 , que en este caso equivale a una frecuencia de corte $f_c^* = 14.9$ Hz. Utilizando $H(a_0, \omega)$ correspondiente a esta frecuencia de corte, se minimiza $E(a)$ y se determina la aproximación entera que maximiza 2.29.

De este modo, y de nuevo para filtros LPD con 1, 2 y 3 coeficientes, se obtienen los filtros QRS-D_i ($i = 1, 2$ y 3 coeficientes) que optimizan la SNR definida en el apartado 2.2.2 (tabla 2.3).

QRS-D _i			
LPD	d	$(\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3)_{s,a}$	$SNR_F c^2$
QRS-D ₁	$\frac{1}{2}$	$(0,1,0)_s$	0.374
QRS-D ₂	$\frac{1}{38.5}$	$(0,9,10)_a$	0.655
QRS-D ₃	$\frac{1}{4}$	$(4,6,7)_s$	0.800

Tabla 2.3: Coeficientes de los filtros LPD para detección de QRS.

Se presentan: Los filtros (QRS-D_i, $i = 1, 2$ y 3 coeficientes), el parámetro d y la $SNR_F c^2$. El subíndice (s, a) indica configuración simétrica o antisimétrica.

La SNR_F dependerá de c , disminuyendo a medida que se incrementa este parámetro. Por ello, en la tabla 2.3 se representa la magnitud relativa $SNR_F c^2$. Esta magnitud, como era de esperar, aumenta al hacerlo el número de coeficientes. Comparando QRS-

M_i con QRS- D_i (tablas 2.1 y 2.3) se ve que los coeficientes de mayor orden tienen más peso en QRS- D_i que en QRS- M_i . Ello se debe a la técnica de diseño, y se justifica dado que el espectro $QRS(\omega)$ del QRS (figura 2.2) tiene una pobre contribución cerca de la frecuencia de corte $f_c = 37$ Hz. La contribución del ruido en esta frecuencia será mayor que la de la señal y por tanto, para mejorar la SNR conviene que el efecto paso bajo se de a frecuencias menores a f_c ($f_c^* = 14.9$ Hz). Esto implica mayor orden en los coeficientes o mayor peso de los de orden más alto, que es el efecto que se observa al comparar QRS- M_i con QRS- D_i .

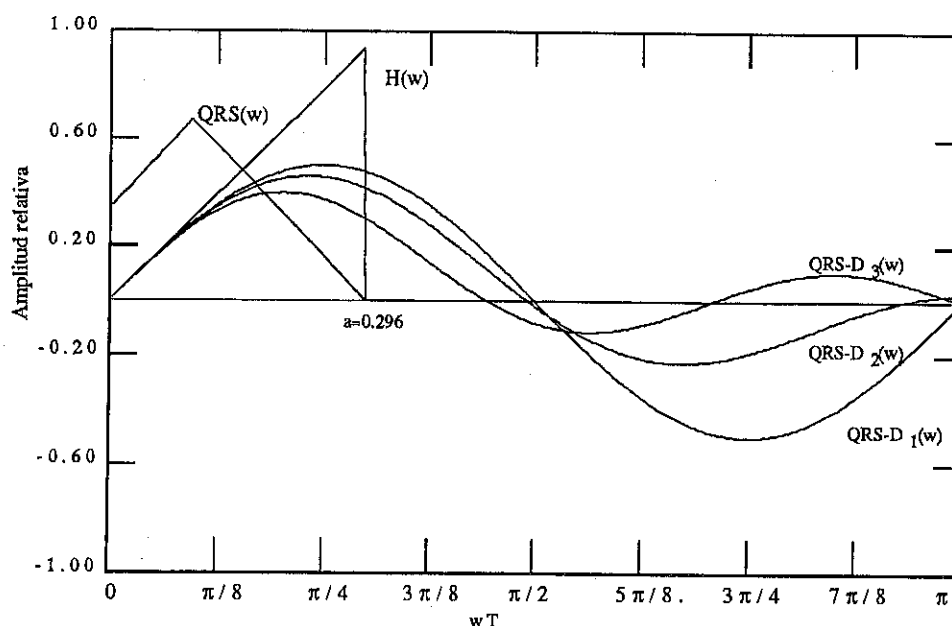


Figura 2.10: Respuesta frecuencial para los filtros $QRS-D_i(\omega)$ ($i = 1, 2$ y 3), el derivador ideal $H(\omega)$ para QRS, y el espectro aproximado $QRS(\omega)$ del QRS.

En las figuras 2.10 y 2.11 se presentan las funciones de transferencia para los filtros QRS- D_i y los resultados de aplicación, respectivamente. En este caso, el ruido blanco añadido se ha hecho con menor SNR, ya que es entonces cuando los problemas de detección son más graves. Como en los casos anteriores se observa una notable mejora al aumentar el número de coeficientes.

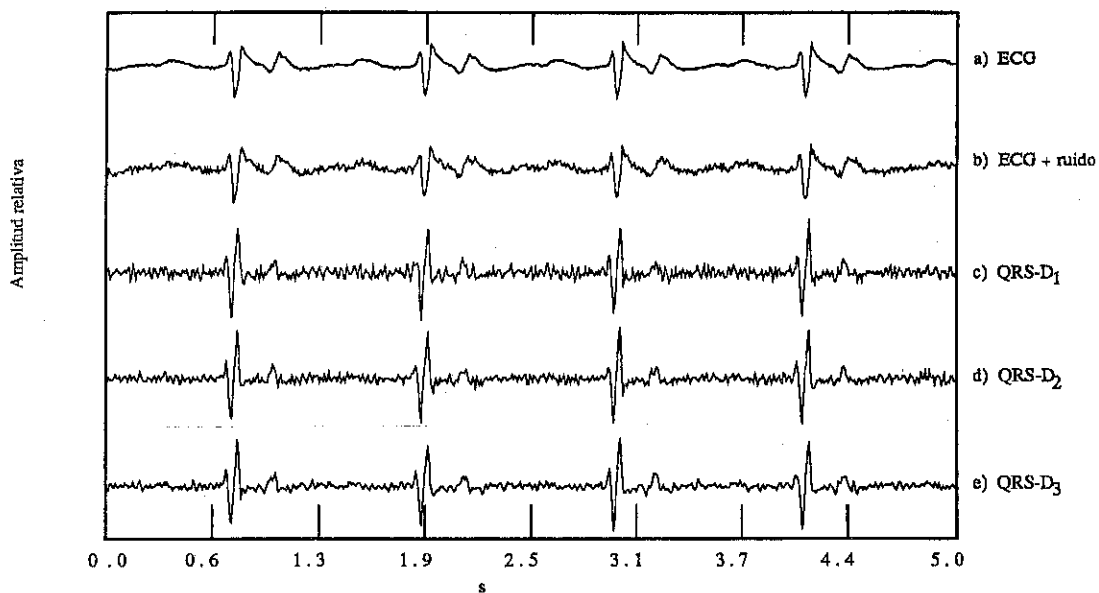


Figura 2.11: Aplicación de los filtros $QRS-D_i$ sobre un registro de ECG real

Se toma un ECG real (a), al cual se le ha añadido ruido blanco (b) con una SNR (cociente de amplitudes máximas) de 10. Las salidas de cada $QRS-D_i$ son c), d) y e), respectivamente.

2.3.4 Detección de ondas P y T

Análogamente al caso anterior, y considerando ahora el espectro de las ondas P y T, $S(\omega) = PT(\omega)$, se calculan los filtros LPD para su detección (PT-D_i, $i = 1, 2$ y 3). En este caso, el valor a_0 que maximiza SNR_H corresponde a una frecuencia $f_c^* = 3.19$ Hz. En la tabla 2.4 se muestran estos filtros PT-D_i obtenidos con la técnica de diseño descrita en 2.2.2.

PT-D _i			
LPD	d	$(\tilde{C}_9, \tilde{C}_{10}, \tilde{C}_{11}, \tilde{C}_{12})_{s,a}$	$SNR_F c^2$
PT-D ₁	$\frac{1}{10.5}$	$(0,0,0,1)_a$	0.012
PT-D ₂	$\frac{1}{21}$	$(0,1,1,0)_s$	0.023
PT-D ₃	$\frac{1}{31.5}$	$(0,1,1,1)_a$	0.035

Tabla 2.4: Coeficientes de los filtros LPD para detección de ondas P y T.

Se presentan los filtros (PT-D_i, $i = 1, 2$ y 3 coeficientes), el parámetro d y la $SNR_F c^2$. El subíndice (s, a) indica configuración simétrica o antisimétrica.

En este caso, la SNR_F para un mismo espectro de potencia c del ruido es mucho menor que para QRS. Esto es debido a que las ondas P y T tienen menor espectro de potencia que el QRS.

En las figuras 2.12 y 2.13 se muestran las funciones de transferencia de los filtros PT-D_i y las salidas de éstos para el mismo ECG considerado en la figura 2.11, respectivamente.

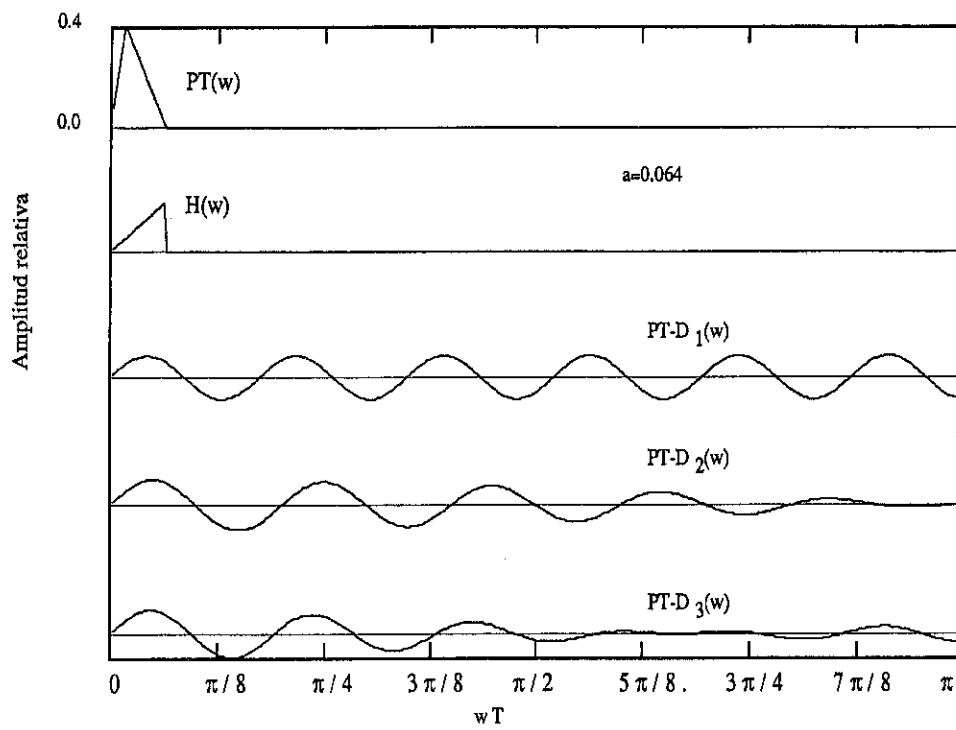


Figura 2.12: Espectro aproximado $PT(\omega)$, respuesta frecuencial para el derivador ideal $H(\omega)$ para ondas P y T , y para los filtros $PT-D_i(\omega)$ ($i = 1, 2$ y 3).

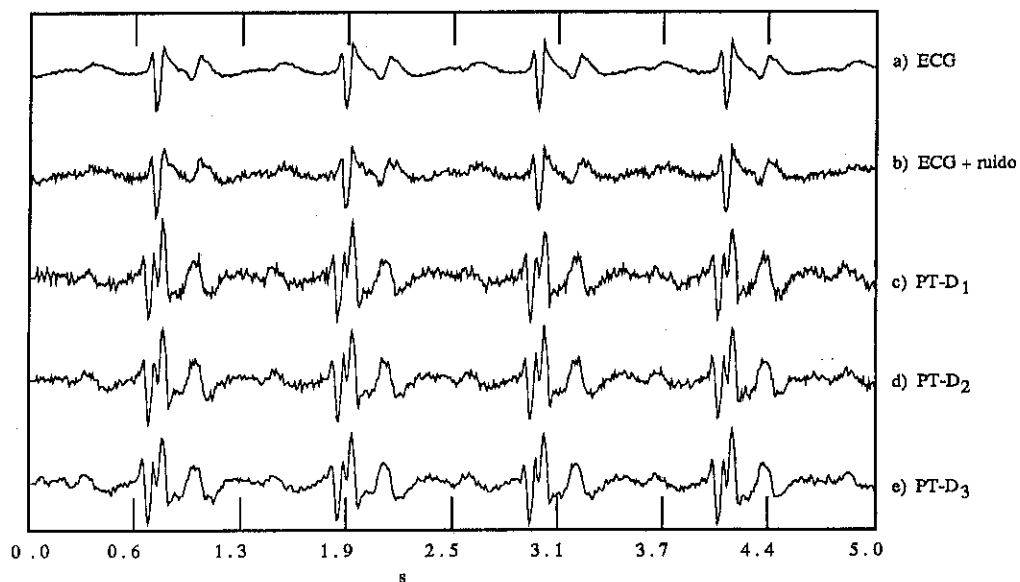


Figura 2.13: Aplicación de los filtros $PT-D_i$ sobre un registro de ECG real

Se toma un ECG real (a), al cual se le ha añadido ruido blanco (b) con una SNR (cociente de amplitudes máximas) de 10. Las salidas de cada $PT-D_i$ son c), d) y e), respectivamente.

2.3.5 Enfatizado de las ondas P y T respecto del QRS

Cuando se procesa la señal ECG interesa en ocasiones extraer o enfatizar las ondas P y T respecto del QRS, que es de mayor amplitud y dificulta la correcta detección de las primeras. Para diseñar un filtro LPD que sea óptimo con este propósito, se considera la técnica de diseño para detección donde el ruido es el propio QRS $N(\omega) = QRS(\omega)$ y la señal son las ondas P y T, $S(\omega) = PT(\omega)$.

Con estas consideraciones se procede como en los apartados anteriores y se obtiene una SNR_H máxima para una frecuencia $f_c^* = 2.87$ Hz. Los filtros obtenidos de este modo se denominarán PT-QRS_i ($i = 1, 2$ y 3 coeficientes). En la tabla 2.5 se indican los valores numéricos de los coeficientes de estos filtros.

PT-QRS _i			
LPD	d		SNR_F
PT-QRS ₁	$\frac{1}{10.5}$	$(\tilde{C}_{11} = 1)_a$	0.055
PT-QRS ₂	$\frac{1}{21}$	$(\tilde{C}_9 = 1, \tilde{C}_{13} = 1)_a$	0.219
PT-QRS ₃	$\frac{1}{30}$	$(\tilde{C}_5 = 1, \tilde{C}_{10} = 1, \tilde{C}_{15} = 1)_s$	0.347

Tabla 2.5: Coeficientes de los filtros LPD para enfatizado de ondas P y T respecto de QRS.

Se presentan los filtros (PT-QRS_i, $i = 1, 2$ y 3 coeficientes), el parámetro d y la SNR_F . El subíndice (s, a) indica configuración simétrica o antisimétrica.

Nótese que ahora se da el valor exacto de SNR_F debido a que el espectro de potencia del ruido, en este caso $QRS(\omega)$, es totalmente conocido y no se necesita introducir factores de proporcionalidad.

En la figura 2.14 se representan los espectros $PT(\omega)$ como señal, $QRS(\omega)$ que ahora debe ser considerado como ruido y las funciones de transferencia PT-QRS_i(ω) para los tres filtros. Se puede observar que en el rango comprendido entre la frecuencia de corte del espectro $PT(\omega)$ y la del $QRS(\omega)$ se obtienen los menores valores para las funciones de transferencia, es decir, se atenúa la parte del QRS que queda fuera del espectro de las ondas P y T, como se pretendía. Para frecuencias superiores a

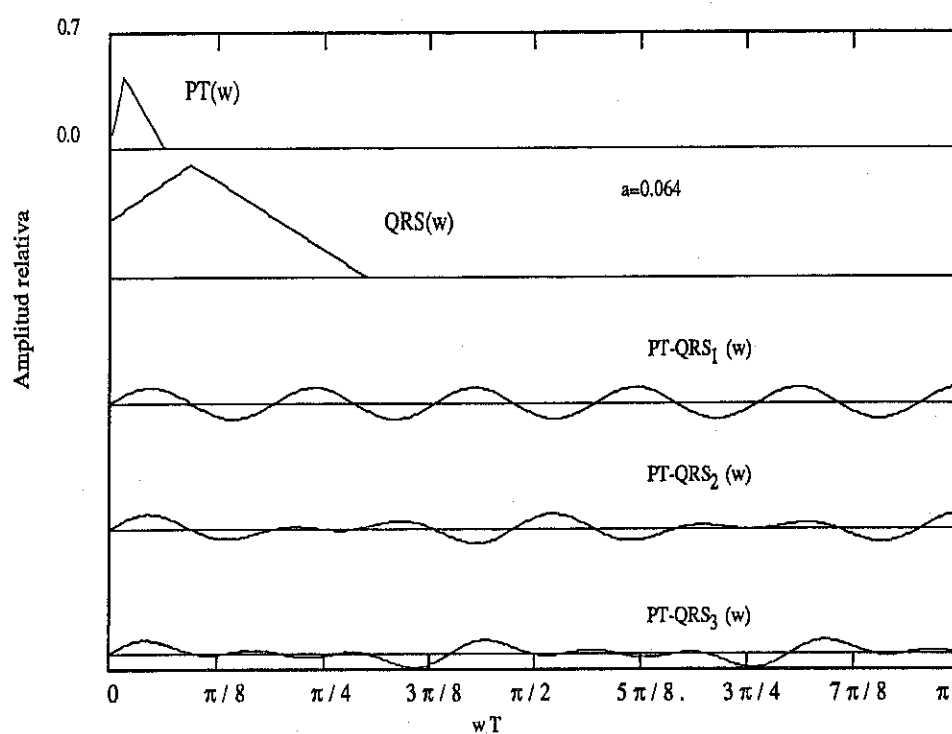


Figura 2.14: Respuesta frecuencial para los filtros $PT-QRS_i(\omega)$ ($i = 1, 2$ y 3), y los espectros aproximados de la onda P y T $PT(\omega)$, así como del complejo QRS $QRS(\omega)$.

la frecuencia de corte del QRS, los filtros $PT-QRS_i(\omega)$ pueden tomar cualquier valor, pues se ha supuesto que en dicho rango no hay contribución de la señal ni del ruido.

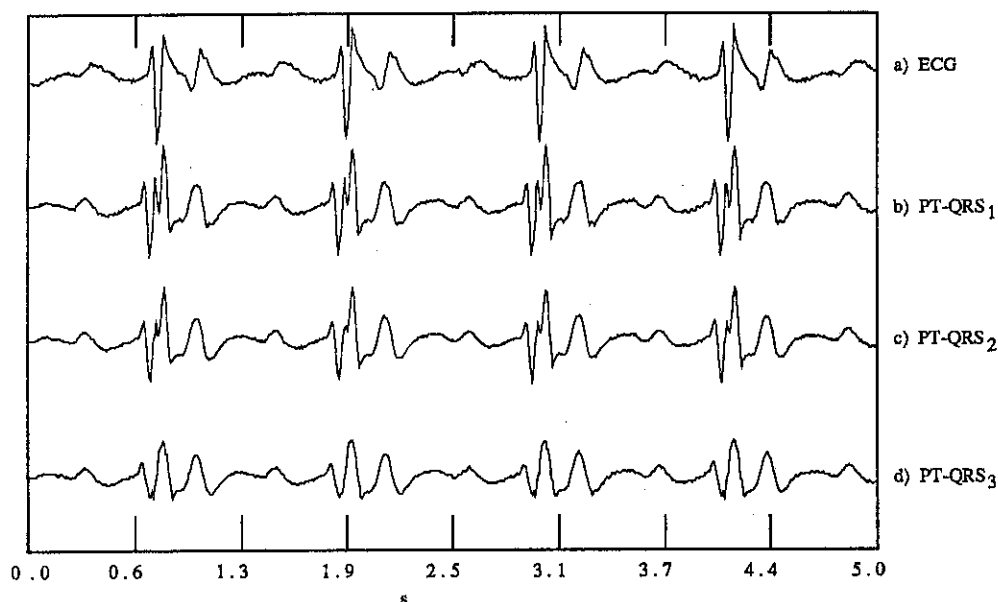


Figura 2.15: Aplicación de los filtros $PT-QRS_i$ sobre un registro de ECG real.

Se toma un ECG real (a), y las salidas de cada $PT-D_i$ son b), c) y d), respectivamente.

En la figura 2.15 se indican las salidas de los filtros $PT-QRS_i$ al aplicarlos sobre el registro de ECG. En este caso no se ha añadido ruido, ya que es el propio QRS el que se considera como tal. Se observa como la SNR es mejor al aumentar el número de coeficientes.

Por último, y recopilando todos los filtros considerados, se presentan en la tabla 2.6, los LPD calculados para tres frecuencias de muestreo de las más habituales en procesamiento de ECG de Holter: $f_m = 200$ Hz, $f_m = 250$ y $f_m = 300$ Hz. Se puede observar que el orden de los coeficientes de los filtros aumenta al hacerlo f_m . Esto es evidente, dado que una mayor f_m aumenta el número de muestras por unidad de tiempo, y por tanto los cálculos habrán de hacerse sobre muestras más espaciadas para obtener el mismo efecto temporal. Esto es equivalente a incrementar el orden de los coeficientes. En esta tabla el parámetro d puede calcularse a partir de las ecuaciones (2.8) y (2.17) ó (2.9) y (2.18) en los casos simétrico y antisimétrico, respectivamente.

FILTROS LPD OPTIMOS

QRS-M _i	$(\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3, \bar{C}_4)_{s,a}$		
	$f_m = 200$ Hz	$f_m = 250$ Hz	$f_m = 300$ Hz
QRS-M ₁	$(0, 1, 0, 0)_s$	$(0, 0, 1, 0)_a$	$(0, 0, 1, 0)_s$
QRS-M ₂	$(5, 6, 0, 0)_s$	$(0, 1, 1, 0)_a$	$(0, 1, 1, 0)_s$
QRS-M ₃	$(3, 6, 4, 0)_a$	$(6, 8, 5, 0)_s$	$(0, 3, 3, 2)_a$
QRS-D _i	$(\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3, \bar{C}_4)_{s,a}$		
	$f_m = 200$ Hz	$f_m = 250$ Hz	$f_m = 300$ Hz
QRS-D ₁	$(0, 1, 0, 0)_a$	$(0, 1, 0, 0)_s$	$(0, 0, 1, 0)_a$
QRS-D ₂	$(0, 6, 5, 0)_a$	$(0, 9, 10, 0)_a$	$(0, 1, 1, 0)_s$
QRS-D ₃	$(8, 10, 5, 0)_s$	$(4, 6, 7, 0)_s$	$(0, 8, 10, 9)_a$
PT-M _i	$(\bar{C}_7, \bar{C}_8, \bar{C}_9, \bar{C}_{10})_{s,a}$		$(\bar{C}_{11}, \bar{C}_{12}, \bar{C}_{13}, \bar{C}_{14})_{s,a}$
	$f_m = 200$ Hz	$f_m = 250$ Hz	$f_m = 300$ Hz
PT-M ₁	$(0, 0, 0, 1)_a$	$(0, 0, 0, 1)_s$	$(0, 0, 0, 1)_s$
PT-M ₂	$(0, 1, 1, 0)_a$	$(0, 1, 1, 0)_a$	$(0, 1, 1, 0)_s$
PT-M ₃	$(1, 1, 1, 0)_a$	$(1, 1, 1, 0)_a$	$(1, 1, 1, 0)_a$
PT-D _i	$(\bar{C}_7, \bar{C}_8, \bar{C}_9, \bar{C}_{10})_{s,a}$		$(\bar{C}_{11}, \bar{C}_{12}, \bar{C}_{13}, \bar{C}_{14})_{s,a}$
	$f_m = 200$ Hz	$f_m = 250$ Hz	$f_m = 300$ Hz
PT-D ₁	$(0, 1, 0, 0)_s$	$(0, 0, 0, 1)_a$	$(0, 0, 1, 0)_a$
PT-D ₂	$(0, 1, 1, 0)_a$	$(0, 1, 1, 0)_s$	$(0, 1, 1, 0)_s$
PT-D ₃	$(1, 1, 1, 0)_s$	$(0, 1, 1, 1)_a$	$(0, 1, 1, 1)_a$
PT-QRS _i	$f_m = 200$ Hz	$f_m = 250$ Hz	$f_m = 300$ Hz
PT-QRS ₁	$(\bar{C}_9 = 1)_a$	$(\bar{C}_{11} = 1)_a$	$(\bar{C}_{13} = 1)_s$
PT-QRS ₂	$(\bar{C}_7 = 1, \bar{C}_{11} = 1)_a$	$(\bar{C}_9 = 1, \bar{C}_{13} = 1)_a$	$(\bar{C}_{10} = 1, \bar{C}_{15} = 1)_s$
PT-QRS ₃	$(\bar{C}_4 = 1, \bar{C}_8 = 1, \bar{C}_{12} = 1)_s$	$(\bar{C}_5 = 1, \bar{C}_{10} = 1, \bar{C}_{15} = 1)_s$	$(\bar{C}_6 = 1, \bar{C}_{12} = 1, \bar{C}_{18} = 1)_s$

Tabla 2.6: *Filtros LPD óptimos, de 1, 2 y 3 coeficientes, en los cinco casos considerados en el texto y con diferentes f_m . El subíndice (s, a) indica configuración simétrica o antisimétrica, respectivamente.*

2.4 Extensión al diseño de otros filtros

La técnica de diseño presentada en este capítulo ha estado orientada hacia el diseño de filtros LPD. Este método puede generalizarse para el diseño de otros tipos de filtros sin más que considerar como función de transferencia ideal, $H(a, \omega)$, la correspondiente al nuevo filtro. Estos pueden ser filtros paso alto, paso bajo, paso banda, derivadores de orden superior, etc. Muchos de estos filtros son usados con frecuencia en el procesamiento de señales biológicas (Principe y Smith, 1986; Van Alsté y Schilder, 1985; Ahlstrom y Tompkins, 1985). Nuevamente se puede usar el conocimiento global de la señal para optimizar el diseño de estos filtros. A continuación se consideran los casos de filtros paso alto y paso bajo, respectivamente.

2.4.1 Diseño de filtros paso bajo

Un filtro paso bajo ideal viene definido por su frecuencia de corte y eventualmente por su ganancia G .

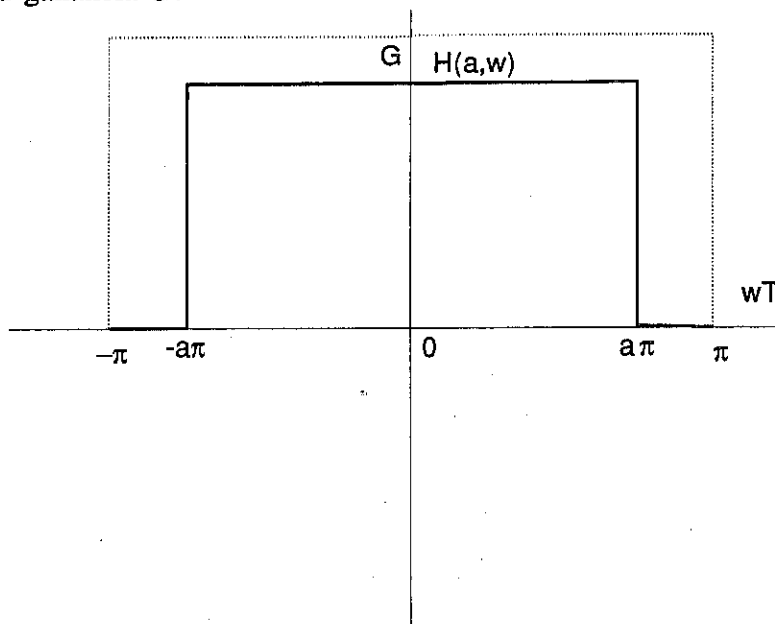


Figura 2.16: Respuesta frecuencial del filtro paso bajo ideal para un parámetro de corte a arbitrario ($0 < a < 1$)

La función de transferencia ideal $H(a, \omega)$ está representada en la figura 2.16

$$H(a, \omega) = \begin{cases} G & |\omega| \leq a\pi \\ 0 & a\pi < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (2.34)$$

En este caso es una función simétrica y por tanto el desarrollo en series de Fourier queda reducido a un desarrollo en cosenos. Los filtros aproximados $F_s(\omega)$, y $F_a(\omega)$ serán

$$F_s(\omega) = \sum_{n=1}^N C_{n_s} \cos(n\omega) \quad (2.35)$$

$$F_a(\omega) = \sum_{n=1}^N C_{n_a} \cos((n - 1/2)\omega) \quad (2.36)$$

y sus expresiones temporales

$$Y_s(k) = \frac{d}{2} \sum_{n=1}^N \tilde{C}_{n_s} [X(k+n) + X(k-n)] \quad \text{con } d \cdot \tilde{C}_{n_s} = C_{n_s} \quad (2.37)$$

$$Y_a(k) = \frac{d}{2} \sum_{n=1}^N \tilde{C}_{n_a} [X(k+n) + X(k-n+1)] \quad \text{con } d \cdot \tilde{C}_{n_a} = C_{n_a} \quad (2.38)$$

Analogamente a la ecuación (2.11), el factor de pesos $W(\omega)$ se define ahora como

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{S(\omega)}{S_0} & |\omega| < a\pi \\ \frac{N(\omega)}{N_0} & a\pi < |\omega| < \pi \end{cases} \quad (2.39)$$

con N_0 y S_0 determinados por (2.12). La restricción para los coeficientes C_n vendrá impuesta por el valor de la ganancia G del filtro y no por la aproximación asintótica en $\omega \rightarrow 0$. En este caso se cumple siempre que

$$\left. \frac{dF(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0} = 0 \quad (2.40)$$

independientemente del valor de los coeficientes C_n puesto que $\sin(n \cdot 0) = 0 \forall C_n$. Así, imponiendo la condición de ganancia G a $\omega = 0$, se obtiene:

$$F(0) = G \quad (2.41)$$

y por tanto se deberá cumplir

$$\sum_{n=1}^N C_n = G \quad (2.42)$$

El resto del procedimiento de diseño es totalmente paralelo al seguido para filtros LPD.

2.4.2 Diseño de filtros paso alto

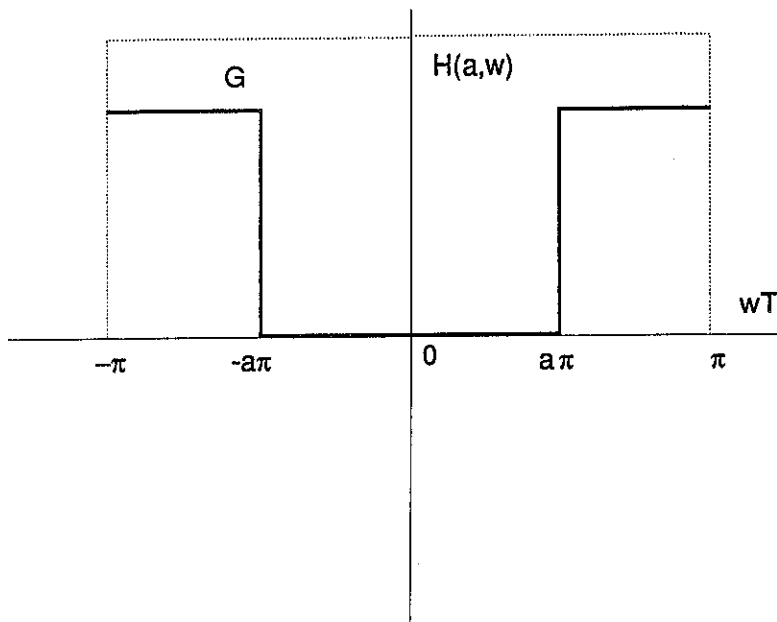


Figura 2.17: Respuesta frecuencial del filtro paso alto ideal para un parámetro de corte a arbitrario ($0 < a < 1$)

La función de transferencia ideal de un filtro paso alto está representada en la figura 2.17 y se expresa como

$$H(a, \omega) = \begin{cases} 0 & |\omega| \leq a\pi \\ G & a\pi < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (2.43)$$

Esta función es también simétrica y la única diferencia respecto al caso de filtros paso bajo está en la restricción para los coeficientes. Ahora se impone que

$$F(0) = 0 \quad (2.44)$$

y esta restricción se convierte en la ecuación

$$\sum_{n=1}^N C_n = 0 \quad (2.45)$$

Se puede exigir una nueva condición para asegurar la ganancia G , la cual se puede expresar como

$$F(\pi) = G \quad (2.46)$$

esto implica que los coeficientes de la configuración simétrica cumplan

$$\sum_{n=1}^N C_n (-1)^n = G \quad (2.47)$$

La configuración antisimétrica nunca verificará esta condición, ya que siempre $F_a(\pi) = 0$ independientemente del valor de los coeficientes. Igualmente, la aproximación en torno a $\omega = \pi$ tendrá más error que en el caso simétrico.

2.5 Conclusiones

En el presente capítulo se ha considerado el diseño de filtros FIR derivativos paso bajo (LPD) para procesamiento de señales biológicas. Para ello se ha propuesto una técnica de diseño haciendo uso de un conocimiento previo del espectro de la señal y del ruido, obtenidos experimentalmente de registros reales. En el caso de las señales biológicas, esto es posible, dado que presentan unas morfologías repetitivas bien conocidas. Los filtros LPD obtenidos de este modo son invariantes en el tiempo y por tanto, en la medida que el espectro de la señal varíe significativamente respecto del estimado, el filtro dejará de comportarse como óptimo con el criterio considerado. No obstante,

esta situación es poco frecuente en señales biológicas y, por tanto, se puede considerar que el filtro seguira siendo óptimo a lo largo del tiempo.

Se han considerado dos criterios diferentes para el diseño de estos filtros en función del objetivo del procesado. Uno trata de minimizar el error entre el derivador ideal y el real, de modo que la forma de la señal sea afectada lo menos posible, y el otro trata de maximizar la SNR para una posterior detección de la señal.

Esta técnica de diseño ha sido aplicada al diseño de LPD para la señal ECG en cinco casos, donde los objetivos del procesado son la identificación y la detección de distintas ondas del ECG (P, T, QRS). Se han considerado los filtros LPD para tres frecuencias de muestreo comunes en el procesado de registros ECG de larga duración (200, 250 y 300 Hz), y con uno, dos y tres coeficientes. Estos resultados muestran como efectivamente se obtienen buenas aproximaciones a la derivada ideal, mejorando éstas al aumentar el número de coeficientes del filtro. La razón para tomar un número reducido de coeficientes es obtener velocidades rápidas de procesado, si bien en la medida que esta restricción sea menor, o la aplicación lo requiera, se pueden considerar mayor número de coeficientes sin pérdida de generalidad.

Por último se ha visto como esta técnica puede extenderse a otro tipo de filtros FIR, analizando las particularidades que presentan los filtros paso alto y paso bajo. La generalización a otro tipo de señales resulta evidente, sin más que disponer de la estimación del espectro de la señal y del ruido.

Capítulo 3

DEFINICIÓN DE PUNTOS SIGNIFICATIVOS DEL ECG

3.1 Introducción

En el capítulo primero se ha visto que la señal ECG representa la actividad eléctrica del corazón. Esta señal responde a unos patrones bien conocidos (figura 1.4) que están asociados con el funcionamiento fisiológico del corazón. Generalmente los sujetos sanos y aquellos que padecen enfermedades cardiacas presentan patrones de señal ECG diferentes. Por tanto, el registro, medida e interpretación de estos patrones es de indiscutible utilidad en el diagnóstico y seguimiento de enfermedades cardiacas.

La medida de los puntos significativos que caracterizan la señal ECG podría, en muchos casos, hacerse manualmente sobre un registro de papel de la señal ECG. Esta forma de medida tiene los inconvenientes derivados de la necesidad de dedicación humana, la lentitud y la práctica inviabilidad de tener seguimientos dinámicos del comportamiento del ECG durante largos periodos de tiempo (variaciones circadianas, etc). Por todo ello resulta obvia la utilidad de procedimientos automáticos de medida del ECG.

Un primer paso en un sistema de medida automático sobre señales ECG es el preprocesado de la señal, para que ésta se presente en las mejores condiciones de medida. Generalmente la señal ECG está contaminada por ruido de origen biológico,

ruido generado por la instrumentación de registro de la propia señal, interferencias de 50/60 Hz y artefactos de movimiento. La eliminación o atenuación de este ruido se realiza con filtros que pretenden mejorar la SNR y no distorsionar la señal. Por otra parte, y en función de la magnitud que se esté interesados en medir, se aplican transformaciones lineales o no lineales sobre la señal, de modo que enfatizen o faciliten la medida a realizar. Este sería el caso de los derivadores considerados en el capítulo anterior y que se usarán en éste y sucesivos. Tanto las operaciones que tienden a mejorar la SNR (filtrado) como las encaminadas hacia un determinado tipo de medida se conocen con el nombre de preprocesado. Este preprocesado, como puede deducirse de lo expuesto hasta ahora, depende tanto del tipo de la señal (en este caso el ECG) como de las medidas que sobre ésta se pretenden realizar. En este capítulo se considerarán y discutirán preprocesados que faciliten la identificación de los puntos significativos del ECG.

Como ya se vio en el capítulo 1, muchas son las características de interés en un ECG. La aspiración es, sin duda, contar con sistemas de medida que permitan una precisa y fiable identificación de estos parámetros. Este objetivo, ambicioso pero esperemos que no inalcanzable, ha sido en los últimos años un tema importante de investigación, donde han habido avances muy significativos y donde se han evidenciado multitud de problemas y limitaciones que hacen que hoy todavía quede un largo camino por recorrer. Las variaciones de morfología de un paciente a otro, presencia o ausencia de ciertas ondas, polaridad de éstas, ruido de diferentes tipos, etc, son algunos de los obstáculos que dificultan el desarrollo de sistemas automáticos de medida de propósito general.

En este capítulo se plantea la medida de puntos significativos del ECG, y en particular la medida automática del intervalo QT (distancia temporal desde el inicio del complejo QRS hasta el final de la onda T) y QTP (distancia temporal desde el inicio del complejo QRS hasta el pico de la onda T) en la señal correspondiente a cada latido cardiaco. La duración del intervalo QT es aproximadamente igual al tiempo de despolarización ventricular más la posterior repolarización de los ventrículos en un ciclo cardiaco. La razón e interés por el que se plantea la medida automática de este intervalo QT radica en su posible valor como marcador de arritmias ventriculares malignas y por tanto de muerte súbita (Anhve y otros, 1978; Schwartz y Wolf, 1978; Puddu y otros, 1981; Taylor y otros, 1981; Ahnve, 1984; Marinchak y otros, 1985; Puddu y Bourassa,

1986; Roberts y otros, 1986; Butrous, 1986). Estos estudios evidencian una fuerte controversia respecto a la significación clínica de este intervalo. La posibilidad de contar con procedimientos fiables de medida del QT permitirían, por una parte, extender los estudios clínicos existentes para definir el rango de validez de este indicador como marcador de muerte súbita, tanto en sí mismo como su evolución temporal. Por otra parte, estos procedimientos automáticos de medida podrán ser usados en los equipos de procesado y diagnóstico de ECGs.

Previamente a la definición de los puntos que determinan el intervalo QT y QTP, o de cualquier otra medida que se quiera realizar sobre un ECG, es necesario detectar la posición de cada latido. Este es un proceso clásico y obligado en todo sistema de análisis de la señal ECG, que se lleva a cabo mediante un detector de complejos QRS. La razón de ello se debe a que el complejo QRS es el conjunto de ondas de mayor amplitud y por tanto mejor SNR en el ECG, lo cual facilita su detección.

Se presenta, por tanto, en este capítulo un sistema de detección de complejos QRS, con los procesados previos necesarios, así como un algoritmo de identificación de los puntos que definen los intervalos QT y QTP. Para conocer la fiabilidad del algoritmo de QT, y dado que no existe una definición analítica de este intervalo, se han validado las medidas automáticas con medidas manuales realizadas por expertos sobre registros de la misma señal. Se ha diseñado de forma específica un detector de QRS para la definición del intervalo QT en cada latido. También se propone otro detector más robusto pero más complejo de cálculo que se basa en el ya propuesto por Jané (1989a), y que incluye una selección de latidos en función de determinados parámetros de su morfología. Este detector puede usarse como un detector de propósito general y además como un "filtro" de latidos con morfología especialmente ruidosa o patológica, que resultan indeseables en determinadas aplicaciones. En capítulos posteriores se usará este detector selectivo (capítulos 5 y 6).

3.2 Detección de complejos QRS en el ECG

Como ya se ha mencionado en la introducción a este capítulo, la detección de los complejos QRS es una parte esencial en cualquier sistema de análisis de la señal ECG. Esto es debido tanto a la información directa que de él se obtiene (ritmo cardiaco)

como a la posibilidad de, una vez conocida la localización de un latido cardiaco, realizar medidas sobre él. Todo ello ha motivado gran cantidad de estudios sobre este problema, de los cuales se presenta una buena revisión en los trabajos de Pahlm y Sörnmo (1984) y de Gritzali (1988).

La detección de los complejos QRS presenta problemas (Thakor y otros, 1983; Pahlm y Sörnmo, 1984) debido a:

1. La variabilidad de su morfología, tanto en una misma persona a lo largo del tiempo como entre distintos individuos.
2. La presencia de ruido en el ECG debido a: interferencias con la red (50 Hz), artefactos asociados con el movimiento relativo entre los electrodos y la piel, interferencias de radiofrecuencia en equipos de cirugía, señal electromiográfica (EMG) correspondiente a la actividad muscular, etc.
3. La presencia de ondas P y T de gran amplitud que dificultan la identificación del QRS.

La bondad de un detector de QRS de propósito general se mide a través de las detecciones que no hace y debiera (falsos negativos), y de las que hace y no debiera (falsos positivos). Tanto unas como otras son indeseables en un detector de propósito general (Pan y Tompkins, 1985). Para aplicaciones concretas puede ser menos grave un tipo de fallos que otros, y ser más tolerables los falsos negativos (perder información) que los falsos positivos (tomar información errónea). Esta situación será la que se presentará cuando se plantee la medida del QT de forma dinámica.

Una primera clasificación de los detectores de QRS los divide en detectores *hardware* y detectores *software*. Este trabajo se centra en los segundos, puesto que se consideran siempre procesados de ECG por *software*. Dentro de estos detectores realizados en *software* se puede establecer la siguiente clasificación (Gritzali, 1988).

- No sintácticos (Pan y Tompkins, 1985; Pahlm y Sörnmo, 1984).
- Sintácticos (Udupa y Murthy, 1980; Belforte y otros, 1979; Papakonstantinou y otros, 1986).

- Híbridos (Birman, 1982; Birman, 1983).

De estos tipos de detectores los más comunes son los no sintácticos, ya que son los que requieren menor número de cálculos. Esta característica los hace los más adecuados para el procesado de gran cantidad de latidos, y por ello aquí se considerarán detectores de este tipo. Primero se exponen sus características generales, después se analiza su realización práctica y por último se propone un detector modificado para hacerlo más robusto, de uso general, y selectivo respecto a latidos muy ruidosos o de morfología muy distinta a la de los demás.

3.2.1 Esquema básico de un detector no sintáctico

Los detectores de QRS no sintácticos generalmente constan de dos etapas: una primera de preprocesado de la señal y una segunda en la que se aplica una regla de decisión que determina las posiciones de cada QRS. La primera etapa a su vez suele estar dividida en un filtrado lineal y una posterior transformación no lineal. En la figura 3.1 se muestra un diagrama de bloques de estos detectores (Pahlm y Sörnmo, 1984).

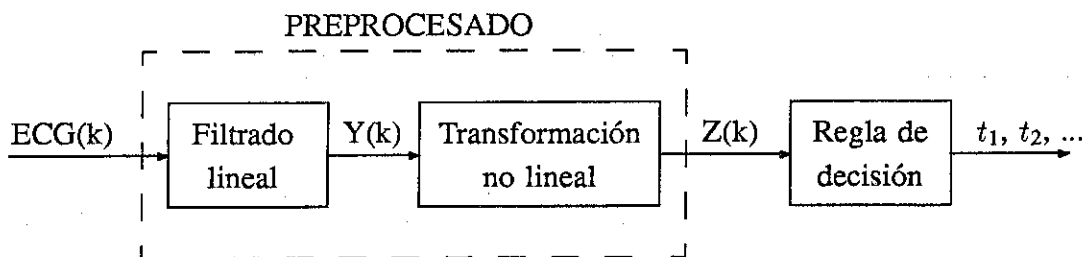


Figura 3.1: Diagrama de bloques de un detector de QRS no sintáctico.

$ECG(k)$ es la señal ECG original, $Y(k)$ es la salida del filtrado lineal, $Z(k)$ es la salida de la transformación no lineal y t_i ($i=1, 2, \dots$) son los instantes estimados para las posiciones temporales de los QRS detectados.

3.2.1.1 Filtrado lineal

El propósito de la etapa de procesado es realzar el QRS y suprimir el ruido y los artefactos. El filtrado lineal que clásicamente se aplica a la señal ECG consta de un derivador y un filtro paso bajo, formando ambos un filtro LPD y que se realiza bien con los dos filtros en cascada o con uno de los LPD estudiados en el capítulo 2. El filtro derivativo pretende realzar las componentes de mayor frecuencia del ECG, que son las del complejo QRS (entre 5 y 30 Hz (Thakor y otros, 1984b)). Este filtro también realza el ruido de alta frecuencia y por ello se aplica después un filtro paso bajo que reducirá este efecto.

El filtro LPD resultante debe enfatizar el QRS, aunque sea de baja amplitud, y atenuar las ondas P y T (componentes espectrales entre 0.05 y 8 Hz) para evitar detectarlas como QRS. Por otro lado, a altas frecuencias deben evitar los artefactos de movimiento, pero no los QRS de alta frecuencia. El tipo de filtros clásicamente usados son FIR de fase lineal, de los cuales los más comunes son los propuestos por Börjesson y otros (1982) y usados posteriormente por otros autores. Su función de transferencia en z es de la forma

$$H(z) = (1 - z^{-M})(1 + z^{-1})^L. \quad (3.1)$$

El término $(1 - z^{-M})$ efectúa la acción derivativa, y el $(1 + z^{-1})^L$ realiza la acción paso bajo. Los parámetros M y L ajustan los límites de la banda de paso. Nótese que el filtro derivativo es uno de los propuestos en el capítulo 2 con un sólo coeficiente C_n .

3.2.1.2 Transformación no lineal

No todos los detectores usan transformaciones no lineales. En tales casos la regla de decisión se aplica sobre la señal obtenida del filtrado lineal. Sin embargo, la utilización de una transformación no lineal permite obtener un pico por cada QRS, de modo que pueda usarse un detector de picos basado en un umbral para determinar las posiciones de los QRS. Este problema es análogo al de separación de segmentos sonoros de los de silencio en el procesado de voz. Una revisión de este tema puede encontrarse en Rabiner y Shafer (1978).

Generalmente esta técnica consiste en una transformación no lineal de la señal de entrada seguida de un filtrado lineal. Particularizando para detección de QRS, la transformación más común es (Pahlm y Sörnmo, 1984)

$$z(n) = \sum_{k=n-N+1}^n y^2(k)h_e(n-k) \quad (3.2)$$

donde $h_e(n)$ es la respuesta impulsional de un filtro de duración N muestras. La señal $y(n)$ puede ser el ECG original o después de un procesado lineal como los expuestos en el apartado anterior. La salida $z(n)$ es, en alguna medida, la energía de las señales de corta duración (menos de N muestras). Trabajos previos han considerado distintos tipos de filtros con respuesta impulsional $h_e(n)$. Ligtenberg y Kunt (1983) y Pan y Tompkins (1985) consideran una respuesta impulsional cuadrada

$$h_{e1}(n) = \begin{cases} 1 & n = 0, \dots, N-1 \\ 0 & \text{otros valores de } n \end{cases} \quad (3.3)$$

y como señal $y(n)$ la derivada primera de la señal. Murthy y Rangaraj (1979) toman la misma señal $y(n)$ pero con un filtro $h_e(n)$ del tipo

$$h_{e2}(n) = \begin{cases} N-n & n = 0, \dots, N-1 \\ 0 & \text{otros valores de } n \end{cases} \quad (3.4)$$

Este último resulta muy sensible al ruido, efecto que puede minimizarse usando un filtro promedio de los dos, tal como proponen los mismos autores:

$$h_{e3}(n) = h_{e1}(n) * h_{e2}(n). \quad (3.5)$$

Otras técnicas han sido consideradas, pero parece que ésta es la que mejor elimina el ruido de fondo y atenúa las ondas P y T de gran magnitud (Pahlm y Sörnmo, 1984). En este trabajo se propondrá una nueva transformación en función de la morfología del QRS para el caso de un detector selectivo (apartado 3.4).

3.2.1.3 Regla de decisión

La regla de decisión se aplica después del procesado, ya sea lineal, o no, o en ocasiones después de cada uno de ellos (Pan y Tompkins, 1985; Thakor y otros, 1983).

Generalmente se hace uso de un umbral y cuando la señal lo sobrepasa se considera la presencia de un QRS. Estos umbrales suelen ser adaptativos, ya que la morfología y amplitud del QRS cambia con el tiempo; el umbral considerado para la detección de un latido próximo es función de la amplitud del QRS en latidos anteriores. Por otro lado, es bien conocida la cadencia de los latidos, de modo que una vez detectado un latido hay un tiempo durante el cual no es probable que aparezca otro. Esto hace considerar periodos refractarios en los cuales no se busca otro QRS. De este modo se evitan detecciones de onda T como falsos QRS (Shah y otros, 1977; Dillman y otros, 1978).

Posteriores refinamientos estudian el ruido y hacen que el umbral sea también función de dicho ruido. También se consideran búsquedas retrospectivas con umbrales menores, cuando el intervalo RR aumenta anormalmente y haga pensar que existe un QRS no detectado (Ligtenberg y Kunt, 1983; Pahlm y Tompkins, 1985).

3.2.2 Detector específico de QRS para definición del intervalo QT

Al plantearse la realización de un detector de QRS, la primera consideración es el objetivo de dicho detector. En este caso, el objetivo es posicionarse sobre cada QRS para después medir el intervalo QT de cada latido cardiaco. En un seguimiento de la evolución dinámica del valor del intervalo QT, no es grave el hecho de que existan detecciones de falsos negativos. Esto supone perder una información puntual frente a la evolución en un largo periodo, *v.gr.* 24 horas. Detecciones de falsos positivos, que ocasionarían valores erróneos de QT, podrán ser rechazados *a posteriori* en función del valor del intervalo QT (apartado 3.3.4). Por otro lado, es importante tener una velocidad rápida de procesado, ya que en registros de Holter de 24 horas se tienen gran cantidad de datos. Un elevado tiempo de cálculo reduciría la aplicabilidad del método en registros de larga duración.

Con estas consideraciones se propone un detector de QRS no sintáctico, el cual tiene una etapa de preprocesado que consta sólo de filtrados lineales. Sobre la señal de salida del filtro se aplica la regla de decisión. El detector propuesto se basa en el presentado por Pan y Tompkins (1985), introduciendo unas modificaciones en la etapa de preprocesado y otras en la regla de decisión, de modo que se facilite la detección *a*

posteriori del inicio del QRS.

3.2.2.1 Preprocesado

El preprocesado que se considera es sólo lineal con dos etapas: un primer filtro derivador y un filtro paso bajo (figura 3.2). Las señales de salida del derivador y del filtro paso bajo se las designará como $d(k)$ y $f(k)$, respectivamente.

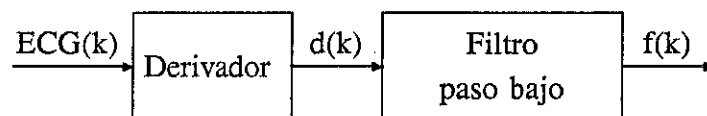


Figura 3.2: Diagrama de bloques del preprocesado del detector específico de QRS para medida del QT.

$ECG(k)$ es la señal ECG original, $d(k)$ es la salida del derivador, y $f(k)$ es la salida del filtro paso bajo.

Derivador

El filtro derivador que se considera es un filtro LPD de los propuestos en el capítulo 2. Se plantea ahora la elección del LPD más adecuado, QRS-M o QRS-D. Inicialmente el objetivo de este preprocesado es la detección, por tanto parecería lógico tomar un filtro LPD del tipo QRS-D. Por otra parte se quieren identificar determinados puntos característicos del ECG, es decir, se quiere identificar su morfología, lo cual aconsejaría tomar un filtro LPD del tipo QRS-M. Una posibilidad es aplicar para la detección un QRS-D y posteriormente, de nuevo sobre el ECG original, un QRS-M. Esta solución se contradice con el objetivo de rapidez de procesamiento que se ha planteado, de modo que se propone usar un filtro LPD resultado de un compromiso, en cuanto a sus características, entre el QRS-D y QRS-M. Si se toman de la tabla 2.6 el filtro QRS-M₁ ($C_{3_a} = 1$) y QRS-D₁ ($C_{2_a} = 1$) se observa que filtros con un coeficiente $C_{3_a} = 1$ ó $C_{2_a} = 1$ presentarían un comportamiento intermedio entre los dos primeros.

Para el presente detector se ha optado por el filtro FIR LPD con un coeficiente

$C_3 = 1$ y cuya función de transferencia $G_1(z)$ es

$$G_1(z) = (1 - z^{-6}). \quad (3.6)$$

La correspondiente ecuación en diferencias es

$$d(k) = ECG(k) - ECG(k - 6), \quad (3.7)$$

donde k indica el instante de muestreo. La respuesta frecuencial viene dada por la expresión

$$G_1(\omega T) = 2j \sin(3\omega T) e^{-j3\omega T}, \quad (3.8)$$

siendo T el periodo de muestreo. La ganancia para $\omega \rightarrow 0$ es tal que $G_1(\omega T) \rightarrow 6T j\omega$, es decir, $6T$ veces la de la derivada ideal, y el retardo es de 3 muestras. La figura 3.3 muestra el valor de la amplitud de $G_1(\omega T)$ en función de la frecuencia f expresada en Hz ($\omega = 2\pi f$).

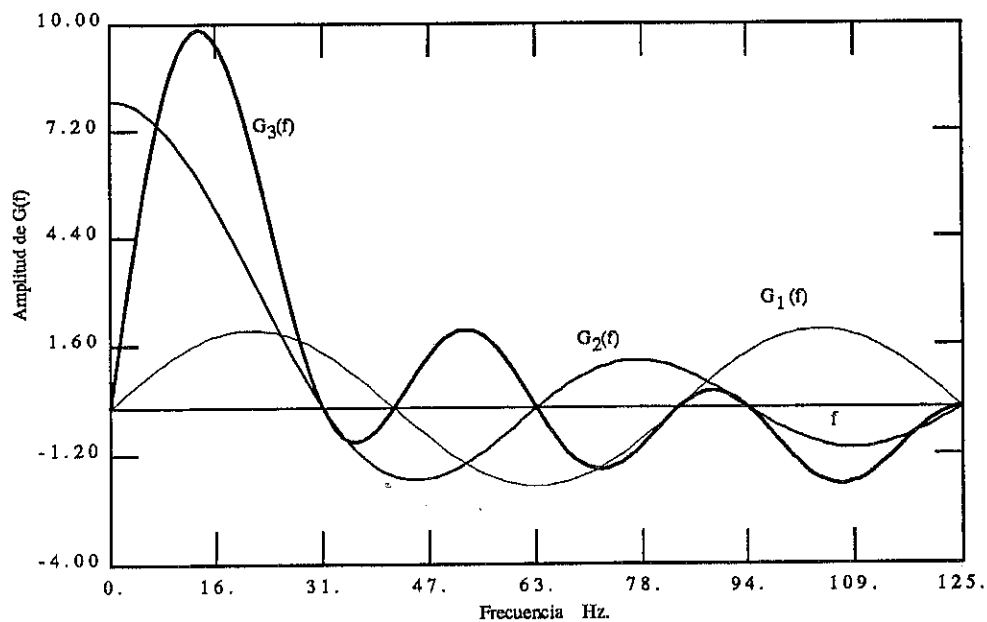


Figura 3.3: Amplitud de las funciones de transferencia para el filtro derivador $G_1(f)$, el filtro paso bajo $G_2(f)$ y la combinación de los dos $G_3(f)$ para una frecuencia de muestreo $f_m = 250$ Hz.

Filtro paso bajo

Después de aplicar este filtro derivativo, y dado que tiene sólo un coeficiente, el ruido

de alta frecuencia queda poco atenuado como puede observarse en las figuras 2.4, 2.5, 2.10 y 2.11. Para obtener una buena atenuación con filtros LPD se requeriría un gran número de coeficientes, por lo que se ha considerado la posibilidad de aplicar un filtro paso bajo en cascada con el derivador.

El filtro paso bajo deberá ser FIR y de fase lineal, lo que implica una condición de simetría para la respuesta impulsional $h(k)$

$$h(k) = h(N - 1 - k) \quad (3.9)$$

Este tipo de respuestas impulsionales corresponden a filtros FIR no recursivos con un elevado número de coeficientes, solución, por tanto, que no resuelve el problema planteado al considerar LPD con más coeficientes. La alternativa son filtros recursivos que requieren menor número de cálculos, pero que generalmente son de respuesta impulsional infinita (IIR)¹ y de fase no lineal. Sin embargo, existen algunas configuraciones de filtros recursivos (Lynn, 1977) que tienen una respuesta impulsional finita y fase lineal. Además, operan con aritmética entera y esto los hace más rápidos de cálculo. La función de transferencia de estos filtros es del tipo

$$H(z) = \frac{1 - z^{-m}}{1 - z^{-1}} \quad (3.10)$$

La ecuación en diferencias viene expresada por la siguiente relación

$$f(k) = f(k - 1) + d(k) - d(k - m) \quad (3.11)$$

$d(k)$ es la entrada al filtro y $f(k)$ su salida en el instante de muestreo k . Este filtro tiene un polo sobre el círculo unidad del plano z , lo cual le haría marginalmente estable. Esto no ocurre, ya que este polo se compensa con uno de los m ceros distribuidos de forma equidistante sobre el círculo unidad, garantizando la estabilidad del sistema.

La función de transferencia (3.10) puede reescribirse en la forma

$$H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-m+1}, \quad (3.12)$$

que es la expresión no recursiva del filtro. Sin embargo, ésta no resulta interesante desde el punto de vista de la realización práctica debido a su mayor coste en tiempo de cálculo.

¹En inglés "Infinite impulse response"

La respuesta frecuencial de este filtro es

$$H(\omega T) = \frac{(1 - e^{-jm\omega T})}{(1 - e^{-j\omega T})} = \frac{\sin(m\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)} e^{-j\frac{m-1}{2}\omega T}. \quad (3.13)$$

La ganancia para $\omega \rightarrow 0$ es m y el retardo $(m-1)/2$ muestras. El primer cero de la ganancia se encuentra a una frecuencia $f = 1/(mT)$.

Para la aplicación concreta del detector interesa que se amplifiquen las frecuencias del QRS pero no otras más altas. Observando el espectro del QRS de la figura 1.5, se puede diseñar un filtro paso bajo con una frecuencia de corte (-3 dB) de 20 Hz. El valor de m que mejor aproxima esta frecuencia de corte para una $f_m=250$ Hz es $m=8$, y entonces el filtro que se propone G_2 es:

$$G_2(z) = \frac{1 - z^{-8}}{1 - z^{-1}}. \quad (3.14)$$

La respuesta frecuencial puede expresarse como

$$G_2(\omega T) = \frac{\sin(4\omega T)}{\sin(\omega T/2)} e^{-j\frac{8-1}{2}\omega T}. \quad (3.15)$$

Este filtro supone una ganancia de 8 cuando $\omega \rightarrow 0$, un retardo de $4-\frac{1}{2}$ muestras, y un primer cero a una frecuencia f_0 que vale $f_0=31.25$ Hz. La respuesta frecuencial en amplitud $G_2(f)$ se muestra en la figura 3.3, así como la correspondiente a la composición de los dos filtros lineales considerados $G_1(f)$ y $G_2(f)$. La conexión en cascada de ambos se designará por $G_3(f) = G_1(f) \cdot G_2(f)$, que corresponde a un filtro paso banda como se ha comentado en 3.2.1.1.

3.2.2.2 Regla de decisión.

La regla de decisión se aplica sobre la señal después de derivada y filtrada $f(k)$. Esta regla consiste en tomar un umbral adaptativo con cada latido n (H_n). Cuando aparece un pico de señal en el instante PK_n , cuyo valor absoluto es mayor que este umbral H_n , se considera la presencia de un QRS en la posición PK_n .

Esta regla de decisión tiene una búsqueda hacia atrás cuando el valor del intervalo RR entre el latido n y el $n-1$ ($PK_n - PK_{n-1}$) es mayor que 1.8 veces el valor del RR medio (RR_m). En este caso se vuelve al latido PK_n y el umbral se rebaja a un valor $H'_n = \frac{4}{5}H_n$.

Una vez detectado el latido n se actualizan el valor del umbral H_n según

$$H_{n+1} = 0.8H_n + 0.2(0.8PK_n), \quad (3.16)$$

y también el valor del RR_m según la expresión recursiva

$$RR_m = \begin{cases} 0.8RR_m + 0.2RR & 1.5RR_m > RR > 0.5RR_m \\ RR_m & \text{otros casos} \end{cases} \quad (3.17)$$

Como puede verse de (3.17), el RR_m sólo se actualiza si el nuevo RR está dentro de los límites de normalidad de variación. De este modo se evita que falsas detecciones de QRS (RR falso) modifiquen el RR_m que será utilizado en posteriores detecciones.

Se toma un periodo refractario de 50 ms después de la posición del final de la onda T para empezar a buscar un nuevo QRS. La forma de definir este punto se verá en 3.3.3, y de este modo se evita detectar la onda T como un nuevo QRS.

En casos donde la onda P es muy grande y con componentes de alta frecuencia es posible detectar ésta como un nuevo QRS. Para evitarlo se realiza una búsqueda de un nuevo pico 200 ms después de PK_n ; si éste existe y es mayor que PK_n , se considerará detectado al QRS en la posición del nuevo pico. Así se evitan falsos positivos debidos a la onda P.

Todo este procedimiento necesita unos valores iniciales del umbral H_1 y del intervalo RR medio (RR_m). El valor inicial de RR_m que ha mostrado un buen comportamiento, sin pérdida de detección en los latidos iniciales, es 500 ms. El umbral se inicializa según la expresión

$$H_1 = 0.8 | f(PK) |, \quad (3.18)$$

donde PK es la posición del máximo del módulo de la señal $f(k)$ en los dos primeros segundos. La figura 3.4 muestra el diagrama de bloques para el proceso de inicialización, mientras que en la 3.5 se representa esquemáticamente el proceso de detección.

3.2.2.3 Ejemplos de aplicación

El detector así descrito se ha aplicado a diferentes señales ECG pertenecientes a distintos pacientes. A modo de ejemplo se verá cómo actúa sobre tres señales ECG con características diferentes.

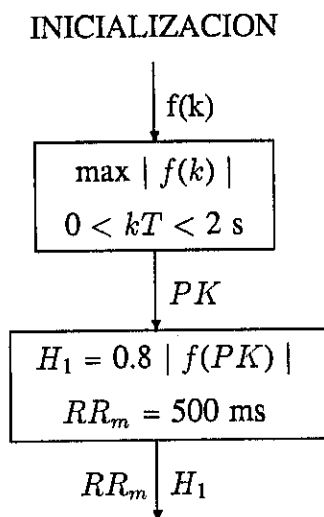


Figura 3.4: Diagrama de bloques de la inicialización del detector específico de QRS para medida del QT.

RR_m y H_1 son los valores iniciales del intervalo RR y del umbral H , T es el periodo de muestreo, y PK es la posición del máximo del módulo de $f(k)$ en los dos segundos iniciales.

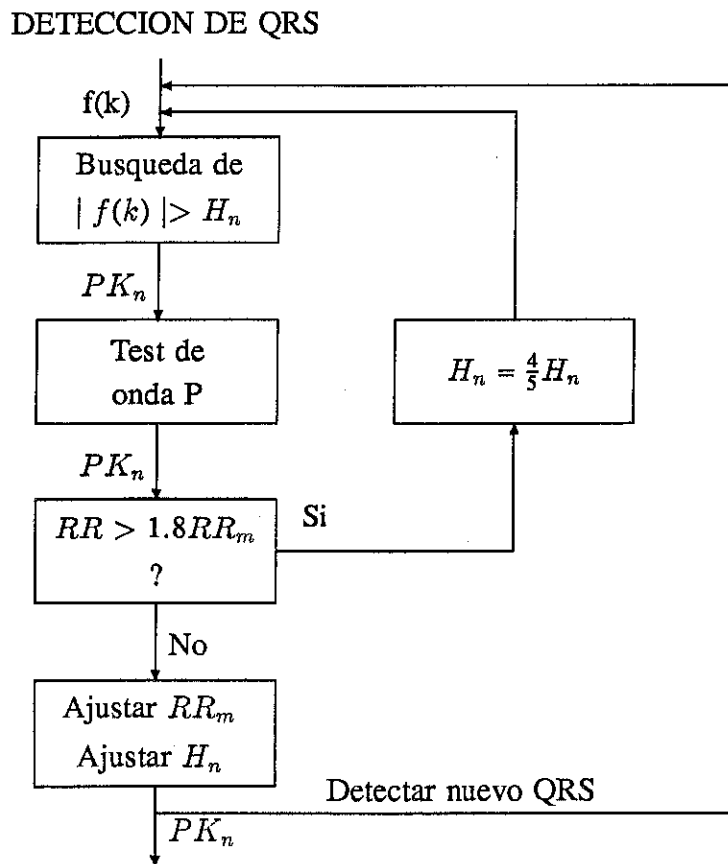


Figura 3.5: Diagrama de bloques del detector específico de QRS para medida del QT.

La notación es la seguida en el texto. La posición PK_n es en cada caso la posición del QRS detectado.

La instrumentación usada para grabar estas señales fue un electrocardiógrafo Mingograf de Siemens, que puede recoger las doce derivaciones clásicas del ECG. A continuación se incorporó un filtro paso bajo analógico con una frecuencia de corte de 200 Hz. Esta señal analógica se registró con un sistema de adquisición digital basado en un computador IBM-AT y una tarjeta de conversión analógico-digital de 12 bits DT-2801-A de *Data Translation*, utilizando una frecuencia de muestreo (f_m) de 1 kHz. La gestión de la adquisición se realizó con el *software* científico ASYST.

A fin de utilizar el detector diseñado para una $f_m=250$ Hz, se realizó un posterior submuestreo digital. La posible introducción de efectos de *aliasing* debidos a este submuestreo se ha despreciado, dado que el objeto es únicamente validar el detector que actúa sobre el QRS (frecuencias menores de 50 Hz), y no obtener información de las componentes de alta frecuencia de la señal. El hecho de considerar estas señales, y no otras de registros de Holter sobre las que trabajará el detector en condiciones normales, se debe a que de este modo se podrá comparar el comportamiento de este detector con el detector selectivo que se propondrá en el apartado siguiente 3.4.

En la figura 3.6 se presenta la actuación de este detector sobre una secuencia de latidos, donde se muestran también las señales intermedias del procesado. En la figura 3.7 se indica cómo actúa el detector en una señal con fuertes artefactos de movimiento, y en la figura 3.8 se muestra su comportamiento sobre una señal con variaciones en la línea de base y una onda T de amplitud comparable al QRS. En ambos casos el detector posiciona correctamente cada latido cardiaco.

En estos ejemplos puede verse cómo la derivada atenúa las variaciones de la línea de base (baja frecuencia) y enfatiza las altas frecuencias del QRS. En la figura 3.7 la detección se hace particularmente difícil por los artefactos presentes, muy similares en amplitud y frecuencia al QRS. En estos casos, la detección resulta poco fiable, aunque en el ejemplo de la figura 3.7 se realice una detección correcta.

3.3 Definición del intervalo QT y QTP

Según se ha puesto de manifiesto en la introducción a este capítulo, el disponer de un método de medida automático del intervalo QT sería de gran utilidad para el diagnóstico



Figura 3.6: Detección de complejos QRS en una señal ECG.

La parte superior muestra el ECG original con las marcas del detector en las posiciones que detecta cada QRS. La señal del centro es la derivada del ECG, y la inferior es la señal derivada y filtrada paso bajo sobre la que actúa la regla de decisión.

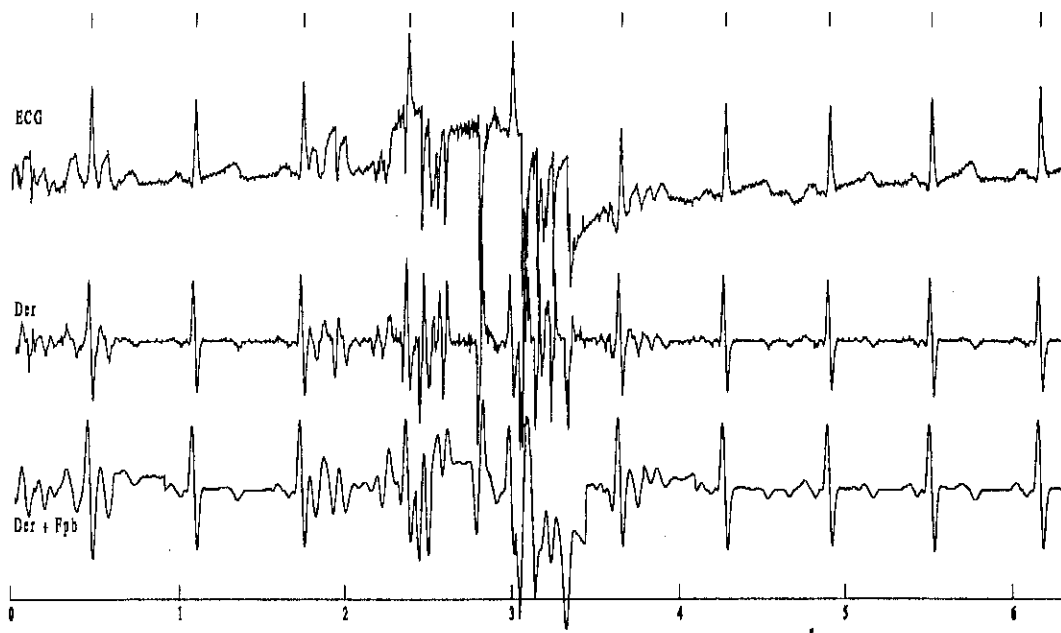


Figura 3.7: Detección de complejos QRS en una señal ECG con fuerte actividad muscular, y artefactos de movimiento.

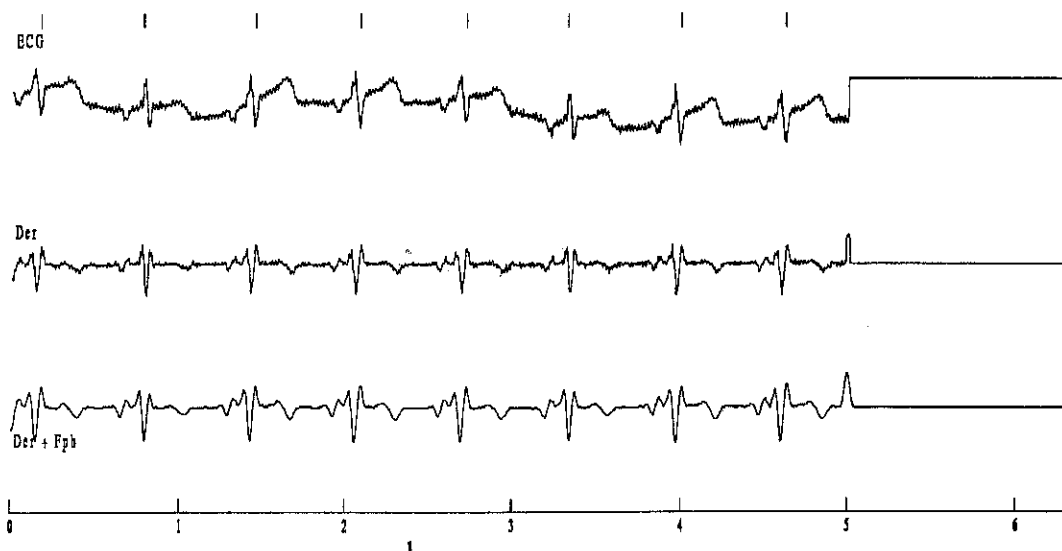


Figura 3.8: Detección de complejos QRS en una señal ECG con variación de la línea de base y onda T de amplitud comparable al QRS.

del ECG. El sistema que mida el intervalo QT deberá ser capaz de definir el inicio del complejo QRS y el final de la onda T. La distancia temporal entre estos dos puntos define el intervalo QT.

Muchos son los problemas que se encuentran al identificar los puntos que definen el intervalo QT. El principal es asegurar que el final de la onda T se identifique correctamente. Ello es debido a que la onda T puede tener una pendiente que disminuye gradualmente, y por tanto resulta difícil determinar el punto exacto donde la onda T acaba. Por otra parte, la onda T puede solaparse con la onda U que en ocasiones aparece después de la T y cuyo origen se desconoce. En estos casos, el intervalo QT resulta prolongado si se detecta el final de la onda U como final de la T. Además, cuando el ritmo cardíaco es alto, la onda T puede también solaparse con la onda P del latido siguiente. Añadido a estos problemas de morfología del propio ECG, están los debidos al ruido presente en la señal, que suponen una dificultad adicional en la identificación del intervalo QT.

Varios métodos se han propuesto en la literatura para medir el intervalo QT (Algra y otros, 1987; Pisani y otros, 1985; Critelli y otros, 1982). Algunos resuelven el problema de la definición del final de la onda T con criterios basados en la inflexión de ésta respecto a la línea de base. Estos métodos son muy limitados en casos donde la línea de base tiene una gran variación, o incluso no existen zonas donde ésta pueda ser correctamente definida. Otros métodos (Pisani y otros, 1985) usan criterios sobre la derivada primera de la señal y un umbral. Este método evita el problema de la línea de base, pero no tiene en cuenta la morfología de la onda T.

A continuación se presenta un algoritmo que usa un criterio sobre la derivada primera del ECG e información de la morfología de la onda T para identificar el final de ésta (Laguna y otros, 1990a), mientras que el comienzo del complejo QRS se identifica con un procedimiento análogo.

Inicialmente se usa el detector específico de QRS para QT expuesto en el apartado 3.2.2, con lo que se obtiene la derivada de la señal y un filtrado paso bajo de ésta. La identificación del final de la onda T se hace en la señal derivada y filtrada paso bajo, dado que esta onda tiene componentes de baja frecuencia (entre 0.05 y 8 Hz). La identificación del inicio del QRS se hace en la señal derivada sin filtrar, dado que esta onda tiene componentes frecuenciales más altas. Esta es también una razón por

la cual primero se deriva el ECG y luego se filtra y no al revés. Con la identificación de estos dos puntos más el pico de la onda T, que se realiza también sobre el ECG filtrado, se puede obtener para cada latido los valores de QT y QTP.

El intervalo QT tiene una dependencia natural con el ritmo cardiaco, que no es patológica, pero que debe ser tenida en cuenta a la hora de estudiar un posible alargamiento del intervalo QT. Una corrección clásica de esta dependencia se realiza mediante la fórmula de Bazett (Bazett, 1920), que define el intervalo QT corregido (QT_c) como

$$QT_c = \frac{QT}{\sqrt{RR}}, \quad (3.19)$$

donde RR es el intervalo RR previo que se calcula a partir de las posiciones temporales (QRS_i) dadas por el detector ($RR = QRS_i - QRS_{i-1}$). El valor del intervalo QT se expresa en milisegundos y el intervalo RR previo en segundos. Por tanto, las unidades del QT_c son $ms \cdot s^{-1/2}$ y se representarán por la letra u ($u = ms \cdot s^{-1/2}$). Esta fórmula es empírica y no corrige exactamente la dependencia de QT con el RR, ya que esta dependencia es diferente en cada individuo. Se han propuesto otras correcciones (Critelli y otros, 1982; Sadeh y otros, 1987) según la expresión

$$QT_c = \frac{QT}{(RR)^b}. \quad (3.20)$$

Bazett (1920) usa $b = \frac{1}{2}$ y Sadeh y otros (1987) propone $b = 0.13$. En cualquier caso se necesita conocer el intervalo RR previo. En el presente trabajo se considera la fórmula de Bazett, ya que es la más extendida, aunque esto no implica ninguna presunción ni limitación respecto a las demás correcciones propuestas.

El cálculo de QT_c puede realizarse a partir del RR previo, definido con las posiciones dadas por el detector. De este modo se tiene para cada latido los siguientes valores QT, QTP, QT_c , QTP_c . El QTP_c se define análogamente al QT_c

$$QTP_c = \frac{QTP}{\sqrt{RR}}. \quad (3.21)$$

Una vez obtenidas estas medidas, se realiza una selección de valores de QT que evitará errores en la identificación de los puntos significativos y posibles falsos positivos dados por el detector. Después de esta selección de latidos, se presentan los resultados, bien de forma gráfica o estadística.

En la figura 3.9 se presenta un diagrama de bloques general para el proceso de medida del intervalo QT, que incluye el detector de QRS presentado en el apartado 3.2.2.

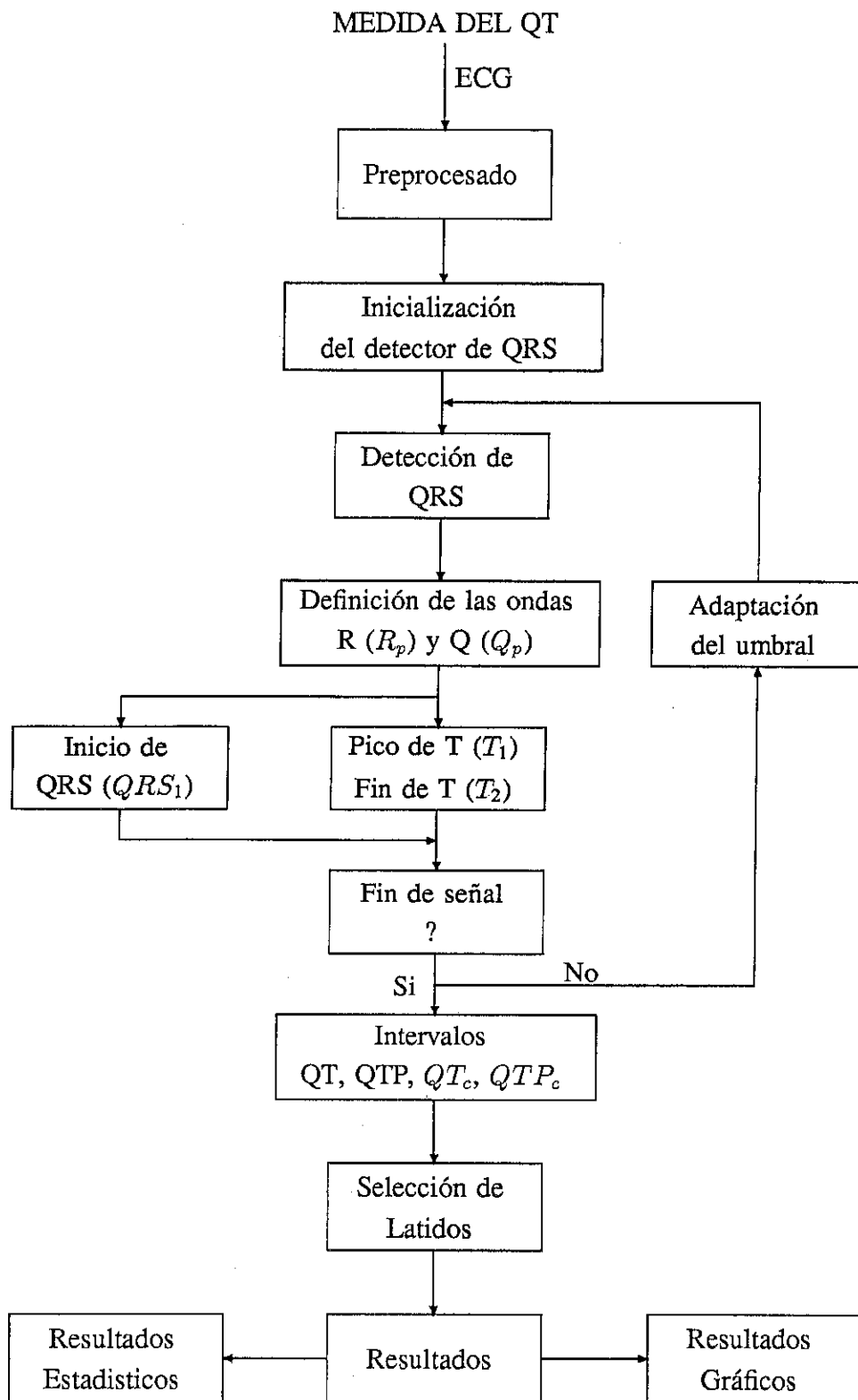


Figura 3.9: Diagrama de bloques general para la medida de los intervalos QT.

Este algoritmo ha sido validado sobre un conjunto de latidos procedentes de 18 cintas de Holter. Se tomaron aproximadamente 40 latidos de cada cinta y se midió su intervalo QT manual y automáticamente. Ambos resultados se han comparado y se ha visto que las diferencias son del mismo orden de las obtenidas por dos expertos que midan el intervalo QT sobre los mismos registros de ECG. Este hecho permite dar al algoritmo los mismos márgenes de fiabilidad que a las medidas manuales.

La validación ha de hacerse con medidas manuales, dado que no existe un criterio analítico de definición del intervalo QT. El valor del QT puede también depender de la derivación en que se mida, en función de la proyección de la actividad eléctrica en la dirección de registro. Esto indica que el valor del QT puede no representar todo el periodo de despolarización más repolarización, pero es la mejor aproximación a él que puede obtenerse a través de la señal ECG.

A continuación se describen en detalle cada una de las partes del algoritmo.

3.3.1 Definición de las ondas R y Q

A partir del procedimiento seguido en el detector de QRS específico para la definición del intervalo QT, se dispone de la posición de un QRS cuando aparece un pico PK_n en la señal derivada y filtrada $f(k)$. A partir de este pico se buscan los más cercanos anterior (PK_a) y posterior (PK_p) de signo opuesto a PK_n , como se describe en la figura 3.10.

Para definir la posición de la onda R (R_p), se parte del conocimiento de que ésta tiene la mayor pendiente del QRS. Entonces el valor de la derivada en PK_n corresponderá al instante de mayor pendiente de la onda (flanco de subida o bajada). El otro instante de mayor pendiente correspondiente al otro flanco de la onda (bajada o subida) será PK_a o PK_p , dependiendo de cual tenga el mayor valor absoluto. Se define la posición de la onda R (R_p) como el cruce por cero entre PK_n y el pico PK_a o PK_p que tenga mayor valor absoluto. La figura 3.11 muestra el diagrama de bloques para este proceso.

Según el procedimiento anteriormente expuesto, hay casos en que la onda Q o la S serán detectados como R. Esto ocurrirá cuando tengan mayor pendiente que ésta. Dicha posibilidad no se considera un problema, ya que en principio el intervalo RR

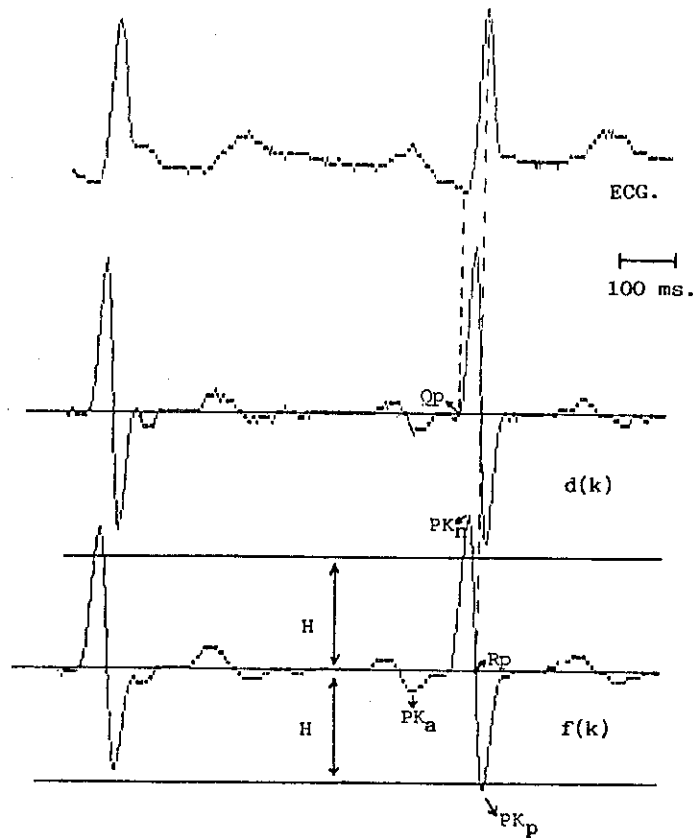


Figura 3.10: Gráfica de definición de las ondas R y Q.

En la parte superior se tiene un ECG procedente de un registro de Holter. La señal intermedia es la derivada $d(k)$ y la inferior es la señal derivada y filtrada $f(k)$. H es el umbral para detección de QRS y las posiciones PK_n , PK_a , PK_p , R_p , y Q_p están indicadas de acuerdo al procedimiento expresada en el texto,

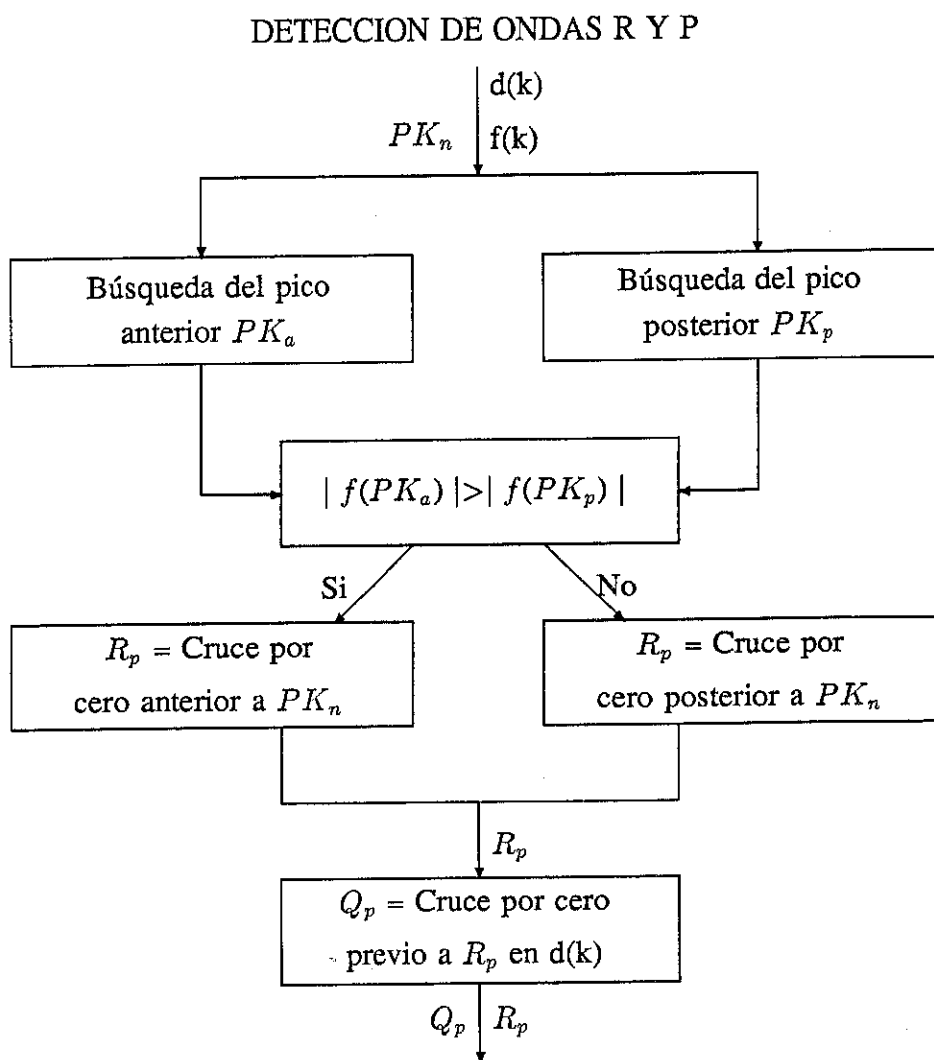


Figura 3.11: Diagrama de bloques para la definición de la posición de la onda R (R_p) y de la onda Q (Q_p).

será igual en magnitud a los intervalos QQ o SS.

Se define la posición de la onda Q (Q_p) como el cruce por cero que precede a la onda R (R_p), pero en la señal derivada sin filtrar $d(k)$. Se toma esta señal ya que la onda Q tiene componentes frecuenciales más altas que la onda T, que se habrán atenuado en la señal filtrada. Si la distancia $R_p - Q_p$ es superior a 80 ms se considera que no existe onda Q. Esto ocurre o bien cuando realmente no existe o cuando ésta haya sido detectada como R.

3.3.2 Definición del inicio del QRS

En el proximo paso se define el inicio del complejo QRS (QRS_1) como el correspondiente a la onda Q (o R cuando la Q no esta presente). Como las posiciones R_p y Q_p han sido identificadas en el paso previo, a partir de Q_p (o R_p cuando no existe onda Q) se busca hacia atrás en la señal derivada $d(k)$ un punto Q_i (o R_i) de máxima pendiente en la señal ECG, figura 3.12. Con este punto se define un umbral H_q (o H_r) como el valor de la derivada $d(Q_i)$ (o $d(R_i)$) dividido por una constante K , que toma el valor $K = K_q$ cuando la onda Q está presente, y $K = K_r$ cuando la onda Q no está presente; $H_q = d(Q_i)/K_q$ (o $H_r = d(R_i)/K_r$). Si el valor de $d(Q_i)$ no es mayor que $\frac{1}{10}$ del valor de $d(PK_n)$, se considera que la onda Q detectada es ruido y se rechaza, buscándose entonces el punto R_i .

A partir de este punto se define el inicio del complejo QRS (QRS_1) como el primer punto anterior a Q_i (o R_i) cuyo valor de la derivada cruza el umbral definido previamente H_q (o H_r). El diagrama de flujo para esta identificación se presenta en la figura 3.13

Se usan diferentes valores de K en los casos de presencia de onda Q (K_q) o de onda R (K_r), debido a los diferentes valores de la pendiente para estas ondas en el complejo QRS. El inicio de la onda R se considera cuando el valor de la pendiente alcanza $\frac{1}{5}$ del maximo ($K_r = 5$) y para el caso de onda Q el valor de K_q es 2 ($K_q = 2$).

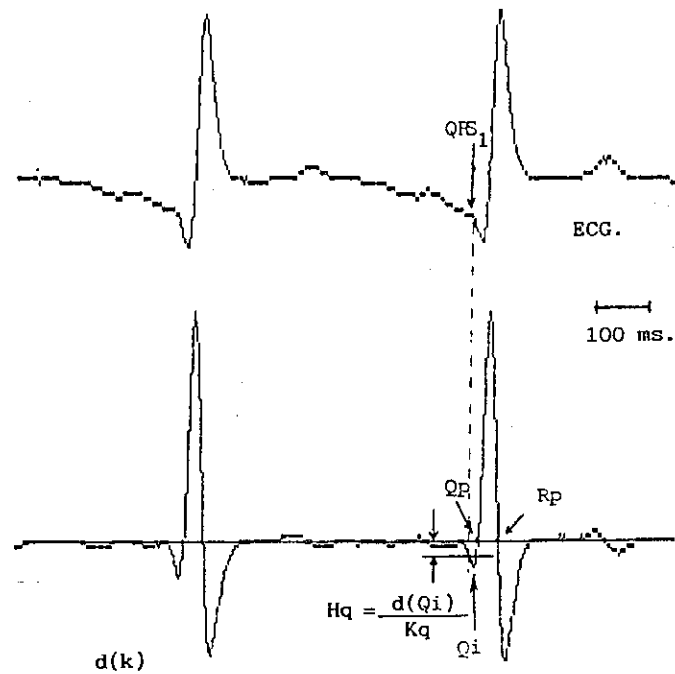


Figura 3.12: Gráfica de identificación del inicio del QRS.

En la parte superior se tiene un ECG procedente de un registro de Holter. La señal derivada $d(k)$ es la de la parte inferior donde se muestran los puntos de máxima pendiente Q_i , el umbral H_q y los puntos Q_p y QRS_1 .

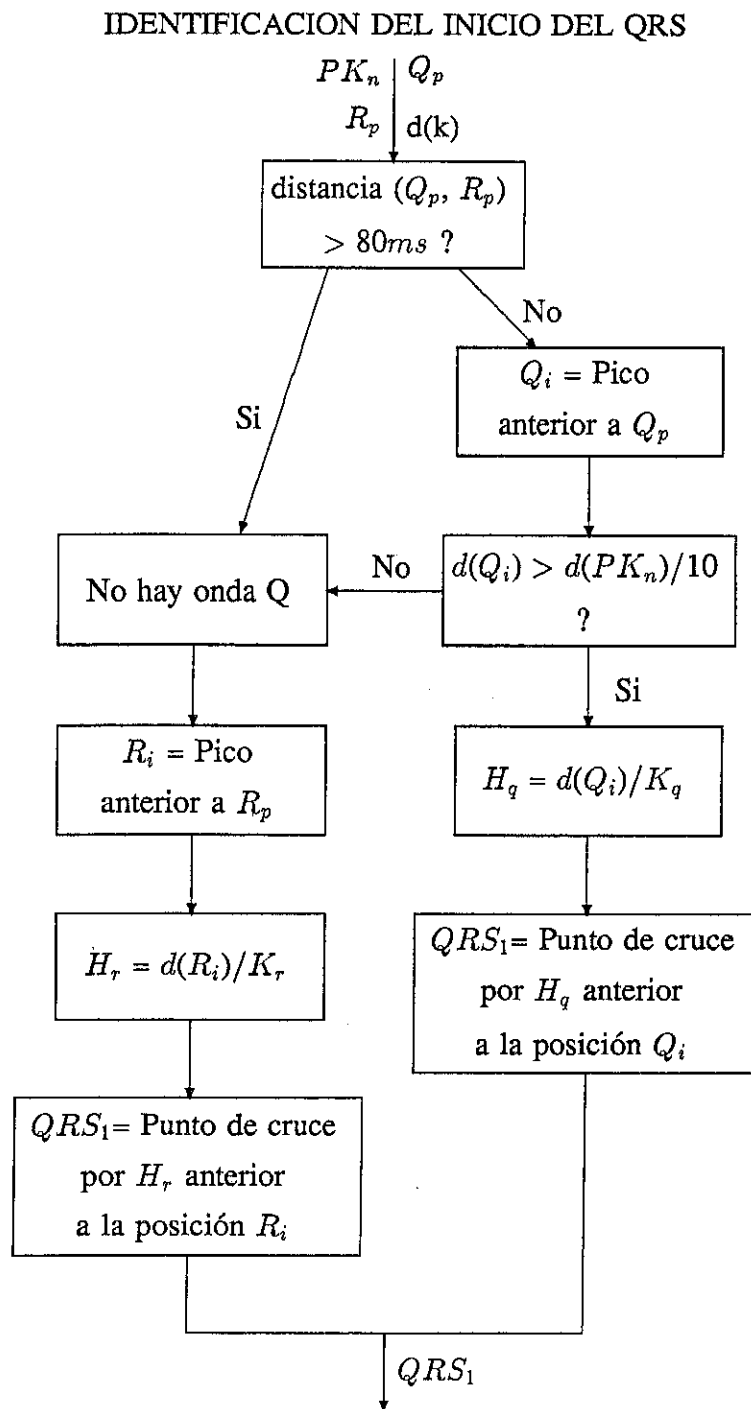


Figura 3.13: Diagrama de bloques para la definición del inicio del complejo QRS (QRS_1).

3.3.3 Definición del pico y final de la onda T

A partir de la posición de la onda R se define una ventana de búsqueda cuyos límites son $iven$ y $fven$ (figura 3.14).

$$(iven, fven) = \begin{cases} (140, 500)ms. & RR_m > 700ms. \\ (100, 0.7RR_m)ms. & RR_m < 700ms. \end{cases} \quad (3.22)$$

Se disminuye el tamaño de la ventana cuando el intervalo RR disminuye. De este modo se evita detectar la próxima onda P como una falsa onda T. El valor RR_m se usa para evitar cambios bruscos en el intervalo RR. Se considerarán cuatro tipos de ondas T:

1. Onda T normal (flanco de subida seguido de flanco de bajada).
2. Onda T invertida (flanco de bajada seguido de flanco de subida).
3. Onda T con sólo flanco de bajada.
4. Onda T con sólo flanco de subida.

Ejemplos de estas ondas podrán verse en la figura 3.17.

Una vez que la ventana está definida, se aplica nuevamente el filtro paso bajo sobre ella y se busca el máximo (max) y el mínimo (min) de los valores de $f(k)$ comprendidos en ella (figura 3.14). Las posiciones correspondientes a los valores máximo y mínimo de $f(k)$ son, respectivamente t_{max} y t_{min} . La figura 3.15 muestra el diagrama de flujo para este método de definición del pico y final de la onda T.

Si la posición de max está antes de la de min , entonces la onda T puede ser normal o con sólo subida. La condición para considerar la onda T de sólo subida es $|max| > 4 |min|$.

Si la posición del min está antes de max , se busca el mínimo ($minp$) entre max y el fin de la ventana. La posición correspondiente a $minp$ es t_{minp} . Si $minp$ es comparable en valor absoluto con max se considera de nuevo onda T normal; en caso contrario se compararán el valor de min y de max y si tienen un valor similar se considera onda T invertida. Si lo anterior no se verifica se considera onda T con sólo bajada.

Para la clasificación de estos cuatro tipos de ondas T se ha obtenido un buen comportamiento usando un factor de 4 para comparar $minp$ con max , y min con max .

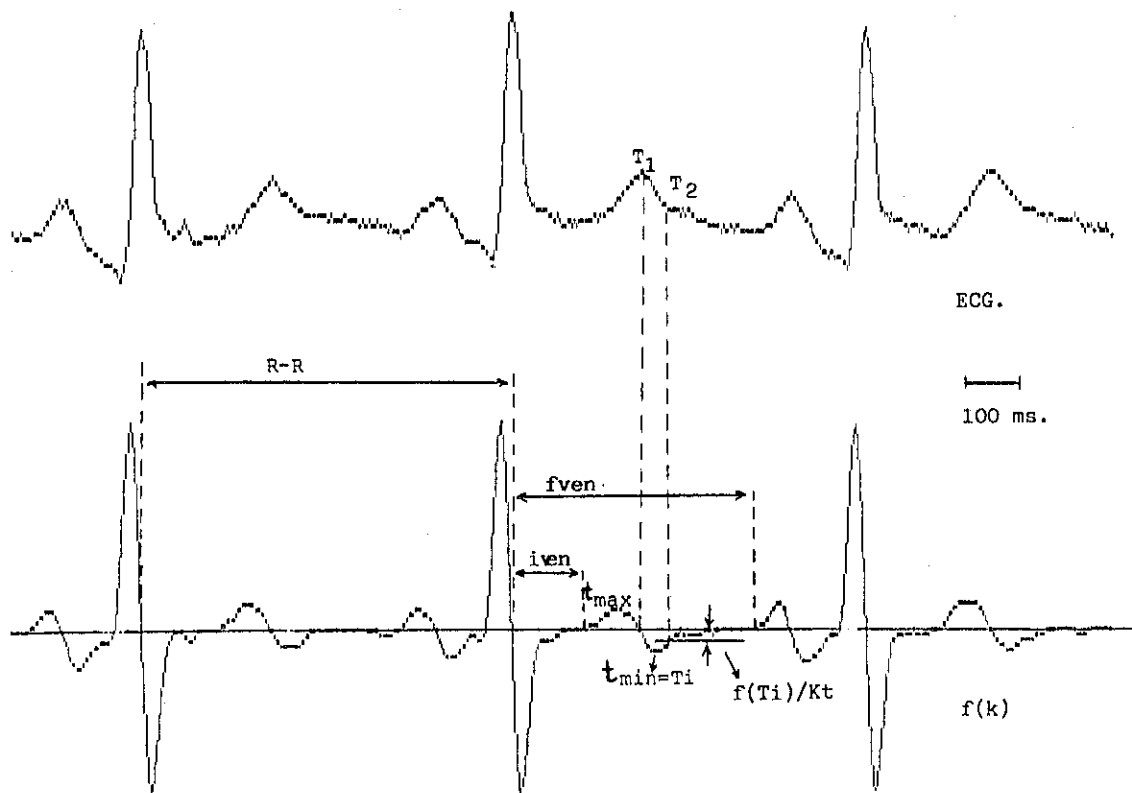


Figura 3.14: Gráfica de identificación del pico y final de la onda T.

ECG original y su correspondiente señal filtrada $f(k)$. Se muestra la ventana de búsqueda de la onda T con las posiciones de max, min y el umbral para la búsqueda del final de la onda T. Las líneas de puntos indican las posiciones del inicio y final de la ventana de búsqueda y las del pico de la onda T (T_1) y del final de ésta (T_2).

La condición de decisión es: si $|max| < 4 |minp|$, entonces onda T normal. Si no, se comparan max con min y si $|min| > 4 |max|$, se considera onda T de sólo bajada; en otro caso la onda T se considera invertida.

Con estas consideraciones se tiene identificado el punto de máxima pendiente en el flanco posterior de la onda T, bien sea el de subida o de bajada. A partir de este punto (T_i) se busca el final de la onda T con el procedimiento descrito a continuación. El valor de $f(k)$ en T_i será $f(T_i)$, el cual unas veces corresponderá a max , a min o a $minp$ en función del tipo de onda T. Este valor tiene información sobre la velocidad de máxima caída de la onda T. Se define el punto final de la onda T (T_2) como aquél a partir de T_i donde la señal $f(k)$ alcanza un valor umbral H_t . El valor de este umbral se define en cada latido como $H_t = f(T_i)/K_t$, con K_t una constante experimental que para un valor de 2 alcanza los mejores resultados ($K_t = 2$). El pico de la onda T (T_1) se define como el primer cruce por cero anterior a T_i en $f(k)$.

Este es el paso más importante del algoritmo. Otros métodos usan la derivada y un umbral que no depende de la velocidad de caída de la onda T (Pisani y otros, 1985). Con este procedimiento el umbral ($f(T_i)/K_t$) se adapta al valor de la pendiente de caída de la onda T. Interferencias de la línea de base (bajas frecuencias) tienen una gran importancia en los métodos que se basan en consideraciones sobre ésta (Algra y otros, 1987; Critelli y otros, 1982). Sin embargo, y con el método propuesto, estas interferencias tienen poca relevancia, ya que tiene frecuencias más bajas que la propia onda T, y el filtro derivador tiene menor ganancia para estas frecuencias que para las de la onda T.

3.3.4 Selección de valores de QT

Una vez el inicio del QRS (QRS_1), el pico de la onda T (T_1), y el final de ésta (T_2) han sido definidos, se puede calcular el valor del intervalo QT restando el instante temporal QRS_1 del T_2 y análogamente QTP con T_1 . Por último, se puede aplicar la fórmula de Bazett y obtener los intervalos corregidos QT_c y QTP_c de la variabilidad del ritmo cardiaco.

$$\begin{aligned} QT &= T_2 - QRS_1 & QT_c &= \frac{QT}{\sqrt{RR}} \\ QTP &= T_1 - QRS_1 & QTP_c &= \frac{QTP}{\sqrt{RR}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

DEFINICION DEL PICO Y FINAL DE LA ONDA T

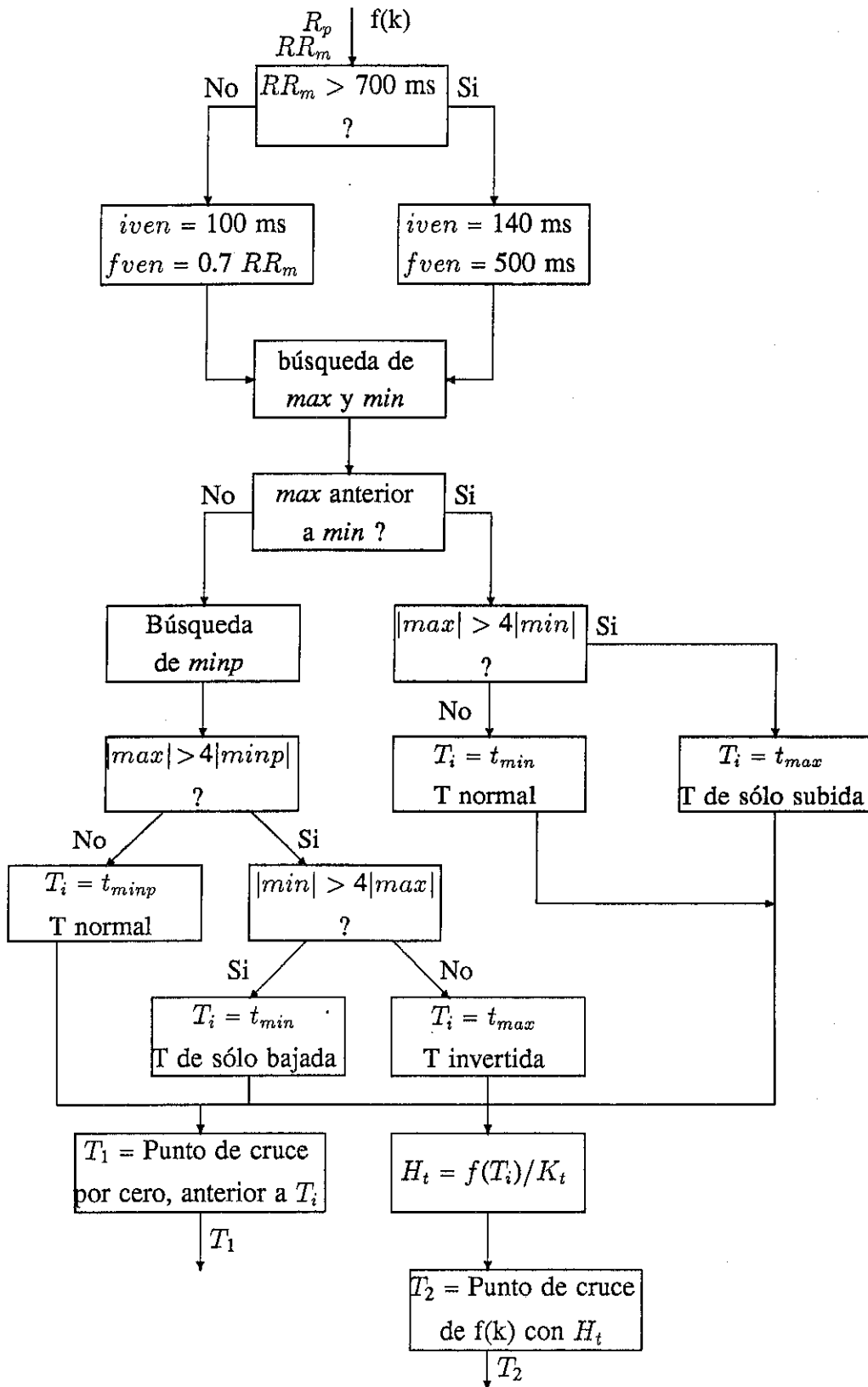


Figura 3.15: Diagrama de bloques para la definición del pico (T_1) y final (T_2) de la onda T.

Debido a que los registros de ECG de Holter tienen una fuerte contaminación de ruido de alta frecuencia es probable que existan errores en la definición del intervalo QT, fundamentalmente debidos a cambios en el final de la onda T que conduce a valores erróneos de QT. También latidos ectópicos, otros latidos anormales, y posibles falsos positivos dados por el detector pueden dar errores en el valor del QT. Para evitar este problema sólo se seleccionan 3 latidos de cada conjunto de 5 de los medidos, rechazándose los 2 latidos que mayor y menor valor de QT tienen en este conjunto. Previamente a esta selección se han rechazado también aquellos cuyo valor de QT está fuera del 15 % de la media actualizada.

De este modo se evitan errores y se tiene mucha mayor seguridad de que los latidos medidos son fiables. Los resultados permiten obtener un seguimiento gráfico o numérico del intervalo QT, QTP , QT_c y QTP_c . La figura 3.16 muestra el diagrama de bloques para esta selección.

3.3.5 Validación

Para evaluar la bondad de este método se han comparado las medidas realizadas manualmente por un experto con las obtenidas automáticamente. Para ello se han seleccionado un conjunto de n latidos pertenecientes al comienzo de los registros de 18 cintas de Holter y se han medido automáticamente por el método propuesto. Se han reproducido registros gráficos de las mismas cintas a una velocidad de 25 mm s^{-1} . Sobre ellos, personas expertas en esta tarea han realizado dos mediciones manuales diferentes (man_1 , man_2) del intervalo QT sobre los mismos n latidos.

Las señales fueron grabadas en un Holter ICR-6500, que tiene una respuesta en frecuencia de 0.05-100 Hz (-3dB). Las cintas han sido leídas con un grabador-reproductor de cinta analógica (AIWA WX808) que tiene una respuesta en frecuencia de 20-16.000 Hz. La velocidad de lectura es 100 veces la velocidad de grabación, lo cual proporciona una respuesta en frecuencia equivalente de 0.02-160 Hz, rango que comprende a la banda registrada por el Holter. El sistema de adquisición es el descrito en el apartado 3.2.2.3 con una frecuencia de muestreo equivalente de 250 Hz. Las derivaciones grabadas son V2 y V5. En la validación se seleccionó aquella con mejor SNR para la onda T (Martí y otros, 1988). En la tabla 3.1 se muestran los resultados

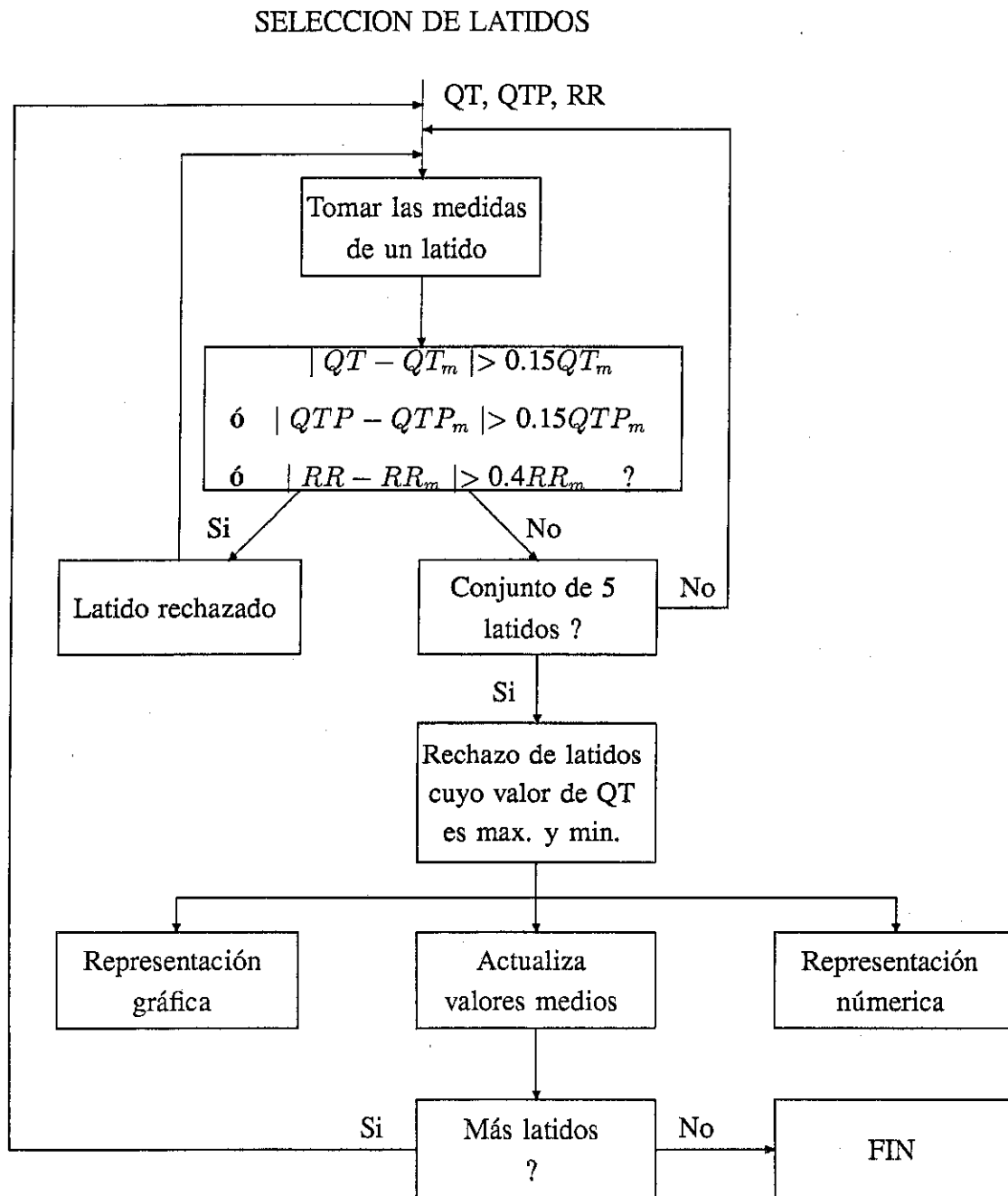


Figura 3.16: Diagrama de bloques para la selección de latidos en función del valor del QT.

de la validación.

El error entre medidas manuales es normalmente de 10 ms, aunque depende de los observadores y puede ser incluso mayor (Pisani y otros, 1985; Ahnve, 1985).

Se han calculado las diferencias (d^*) y desviaciones tipo (SD^*) de cada par de medidas ($aut - man_i$, $i=1,2$; y $man_1 - man_2$), siendo d y SD los valores obtenidos después de rechazar el máximo y el mínimo en cada conjunto de 5 latidos. Nótese como la SD mejora de 17.7 a 14.3 ms ($aut - man_1$) y de 17.4 a 14.4 ms ($aut - man_2$) cuando se realiza la selección de latidos. El error medio d mejora de 2.4 a 2.0 ms y de 0.9 a 0.4 ms, respectivamente. La desviación tipo entre medidas manuales es del orden de 10 ms (10.2 ms), lo cual está de acuerdo con los valores referenciados en la literatura y comentados previamente.

La desviación tipo de la diferencia entre el valor del QT medido manual y automáticamente está dentro del rango de 10 a 15 ms. Por tanto puede decirse que la reproductividad de las medidas automáticas es comparable a la de las realizadas de forma manual. Este hecho hace que pueda usarse dicho método con el mismo margen de fiabilidad que las medidas manuales.

El algoritmo desarrollado está realizado en el lenguaje de programación *Pascal* y se ejecuta sobre un ordenador tipo PC o compatible. Su tiempo de ejecución, incluyendo el preprocesado y la detección de QRS, es de aproximadamente 90 minutos en un *Compaq 386/20* para registros de 24 horas, si bien este tiempo depende también del ritmo cardiaco que fija el número de latidos en los que hay que medir el intervalo QT.

3.3.6 Ejemplos de aplicación

En la figura 3.17 se muestran registros de ECG pertenecientes a un latido de cada una de las 18 cintas de Holter consideradas en la validación. Sobre la señal de cada latido se muestran los puntos donde el algoritmo marca el inicio y final del intervalo QT, así como las posiciones de las ondas Q, R, y pico de la onda T. Puede observarse que en los registros 2, 3, 4, 5, 6, y 12 no se ha detectado onda Q.

En la figura 3.18 puede verse cómo se identifica el intervalo QT en algunos latidos especialmente ruidosos. También se muestran las señales resultantes del preprocesado

Cinta	n	Aut - man ₁				Aut - man ₂				man ₁ - man ₂	
		d*	d	SD*	SD	d*	d	SD*	SD	d*	SD*
1	34	4.3	2.4	33.9	16.9	7.0	-0.8	36.0	12.6	3.6	12.6
2	42	3.5	3.0	15.1	12.0	1.7	-0.1	11.5	9.8	-0.3	14.7
3	26	-5.9	-8.5	21.0	19.5	-7.7	-7.4	18.8	20.9	2.7	18.5
4	19	-2.3	-2.8	7.7	7.3	-7.2	-7.5	7.3	8.1	4.7	6.8
5	38	4.5	3.2	10.3	8.6	4.5	3.2	10.3	8.6	1.9	10.2
6	49	-21.0	-20.0	10.4	9.0	-22	-21	14.4	15.4	0.0	10.7
7	39	-7.2	-10.0	20.4	15.0	-26	-28	23.7	17.4	19.2	14.4
8	41	1.0	2.4	13.1	13.3	-1.1	-1.2	14.6	14.5	2.1	14.1
9	29	16.5	16.8	18.7	19.3	16.7	16.5	16.9	17.7	-1.0	5.5
10	39	-8.8	-8.5	13.1	12.4	-7.1	-7.3	14.1	14.9	-1.3	7.6
11	42	9.5	9.1	14.0	11.6	6.8	6.3	11.0	7.5	2.6	7.9
12	45	-17.0	-16.0	16.7	14.6	-18	-15	19.1	16.9	0.9	8.4
13	36	8.8	9.4	17.8	15.2	9.4	11.4	19.0	17.5	-0.6	5.7
14	34	7.7	10.9	17.0	14.8	12.3	14.6	17.7	15.7	-4.4	7.3
15	37	8.2	5.1	44.7	22.1	6.1	5.8	39.8	21.9	2.2	15.4
16	35	11.7	11.7	16.0	16.0	9.7	8.5	12.5	11.5	1.7	12.8
17	40	19.6	17.9	13.2	12.9	21.9	21.6	12.3	11.9	-0.2	6.5
18	35	9.5	9.3	15.9	17.5	9.9	8.4	14.8	16.7	-0.3	5.0
Media	37	2.4	2.0	17.7	14.3	0.9	0.4	17.4	14.4	1.9	10.2

Tabla 3.1: Resultados de validación del algoritmo de QT.

Se presentan los resultados de la validación entre las medidas automáticas y manuales (aut - man₁ y aut - man₂) así como entre las dos medidas manuales (man₁ - man₂) para cada una de las 18 cintas de Holter y para el total. n es el número de latidos medidos en cada cinta, d* es el valor medio de las diferencias entre las dos medidas de QT a comparar, SD* es la desviación tipo. d y SD son los valores antes mencionados pero después de realizar la selección de latidos. Las unidades de d, d*, SD, y SD* son ms.

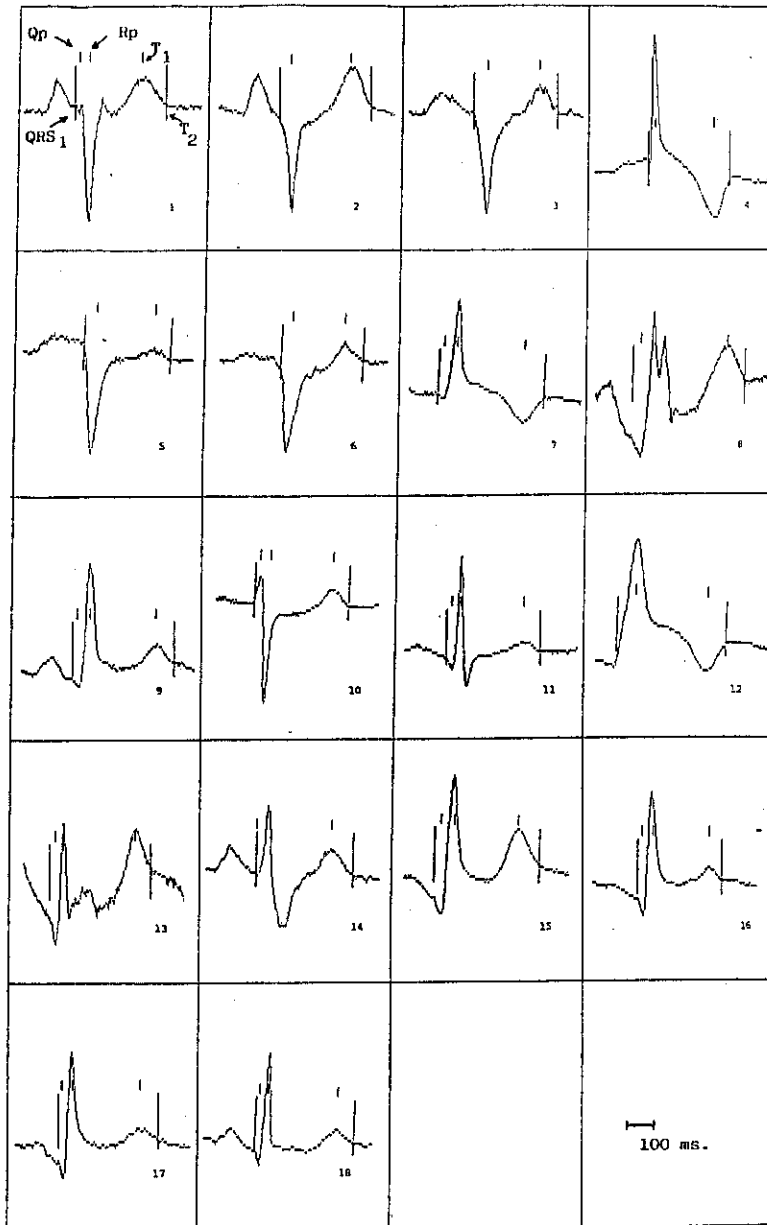


Figura 3.17: Ejemplos de medida automática del intervalo QT.

Cada latido pertenece a un cinta diferente de las 18 usadas en la validación. Las líneas largas indican el inicio del QRS (QRS_1) y el final de la onda T (T_2) tal como las identifica el algoritmo de medida. las líneas cortas indican la posición de la onda Q (Q_p), R (R_p) y pico de la onda T (T_1), en este orden. Cuando sólo hay dos marcas estas pertenecen a la onda R y pico de la T. En estos casos no se ha detectado onda Q.

(derivada y filtrado paso bajo). Se ve cómo por ejemplo en el tercer latido de la fila superior resultaría imposible definir una línea de base, pero el criterio de la derivada proporciona una buena identificación del valor del QT. En los casos donde la SNR de la onda T es muy mala obtenemos definiciones del intervalo QT que no dejan de ser una aproximación, siendo difícil de realizar con mayor precisión incluso manualmente (tres primeros latidos de la última fila).

En la figura 3.19 se presenta, a modo de ejemplo, la evolución de los distintos intervalos de QT en un paciente durante las 24 horas. Se observa como la fórmula de Bazett corrige la dependencia del QT con el intervalo RR.

3.3.7 Generalización a otros intervalos

Todo el procedimiento propuesto para identificar el inicio del complejo QRS y final de la onda T puede generalizarse para cualquier onda que presente una inflexión con una cierta pendiente respecto de la línea de base. Así, una vez detectada la posición del pico de la onda puede estimarse su comienzo y fin del modo expuesto anteriormente. Este procedimiento puede usarse para ondas P, T y complejo QRS. Como ya se ha visto en el caso del intervalo QT, es necesario proteger el método frente a ausencias o situaciones de morfología especial. Ello puede realizarse si se tiene un conocimiento previo de la morfología de las ondas en estudio, de modo que puedan rechazarse resultados sin sentido físico.

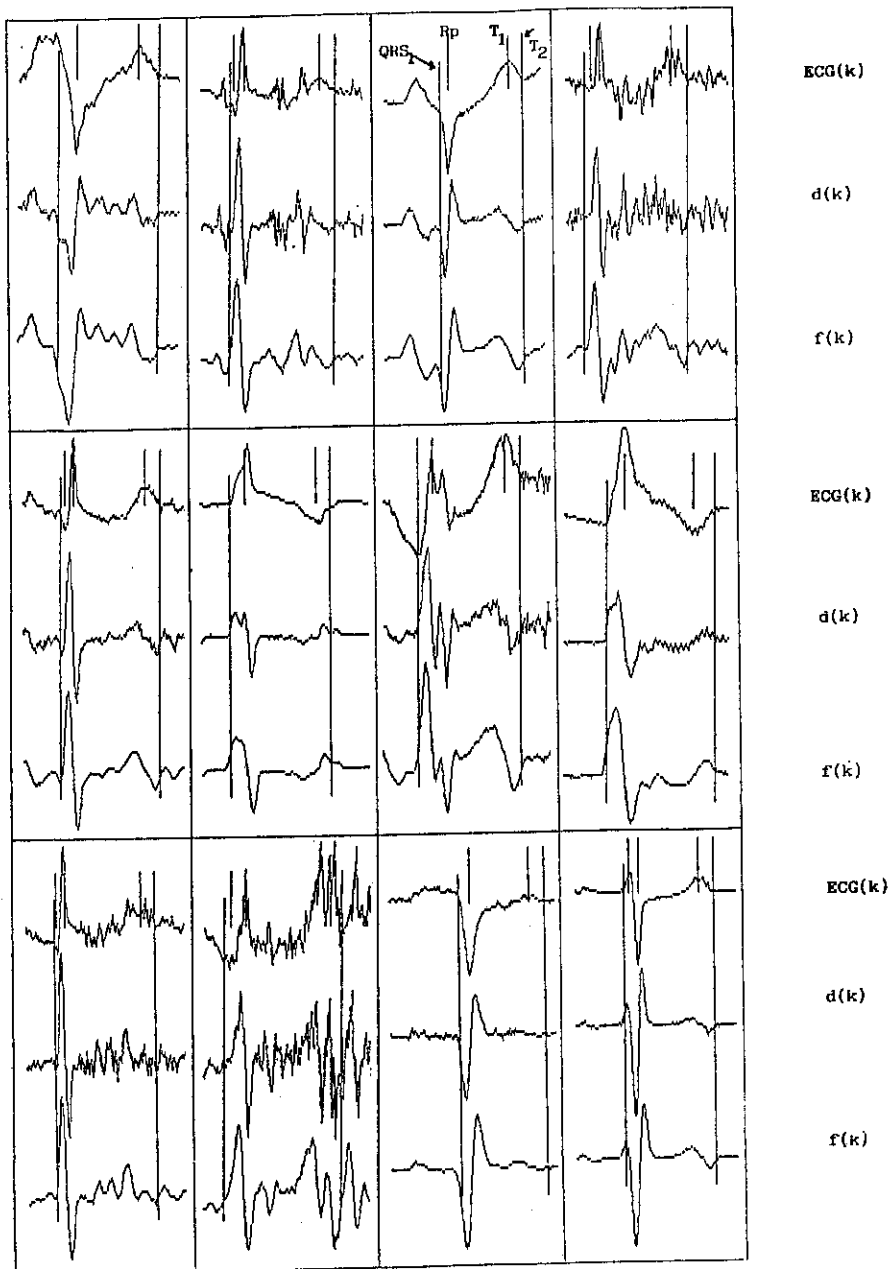


Figura 3.18: Ejemplos de medida automática del intervalo QT en latidos ruidosos.

Se han tomado 12 latidos especialmente ruidosos, y sobre ellos y sus señales procesadas se muestran los puntos identificados por el algoritmo. Las líneas largas muestran el punto QRS_1 y T_2 , y las cortas indican las posiciones de los puntos Q_p , R_p , y T_1 .

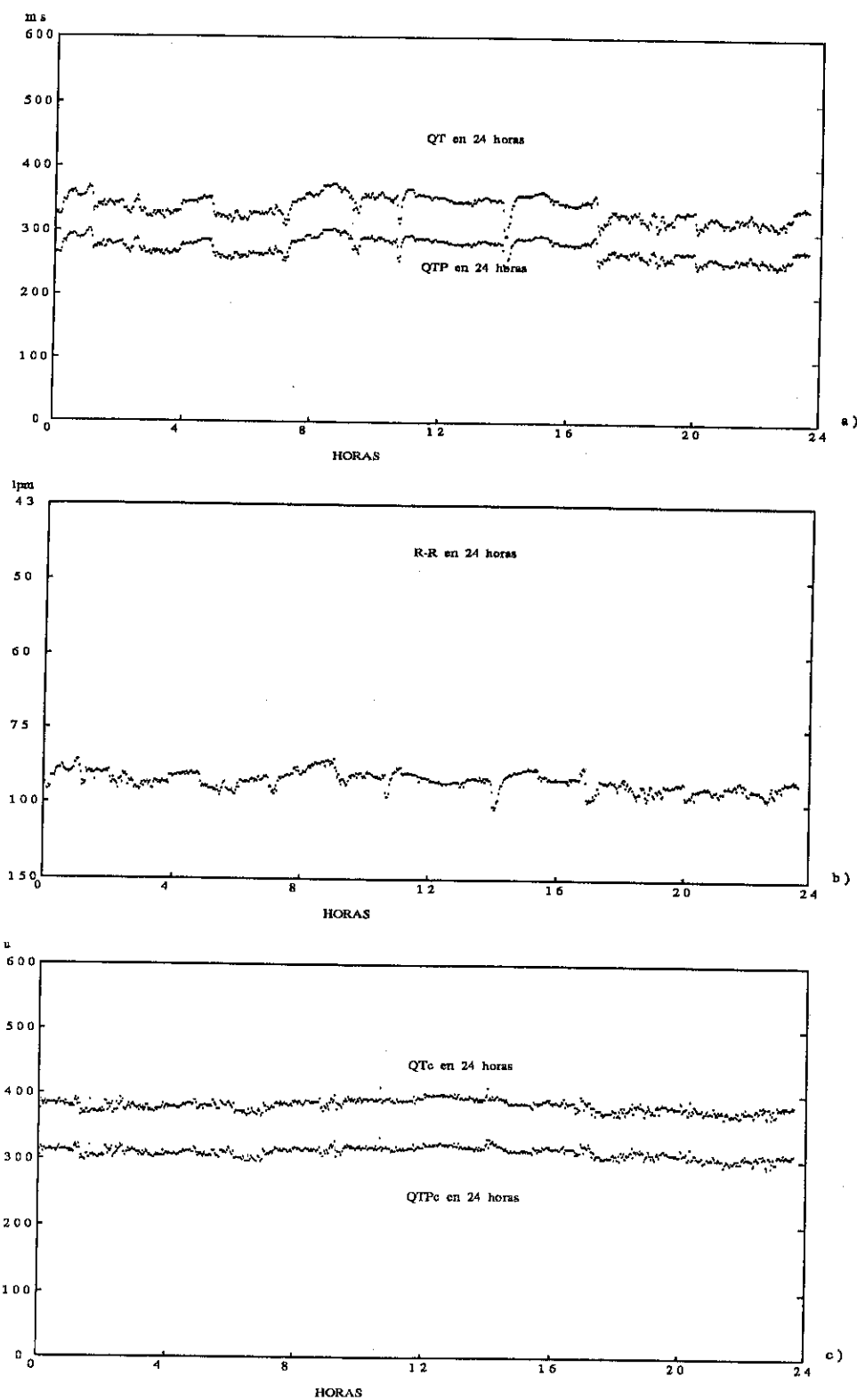


Figura 3.19: Evolución dinámica de los intervalos de QT

Evolución de los intervalos de QT en un paciente. a) Evolución del QT y QTP, b) evolución del intervalo RR expresado en latidos por minuto (lpm), c) evolución del QT_c y QTP_c . Cada punto es el promedio de valores en 36.4 s. Nótese cómo la dependencia fundamental del QT con el RR está bien modelada con esta corrección.

3.4 Detector de QRS con selección de latidos

En el apartado 3.2.2 se ha propuesto un detector de QRS con unos objetivos muy concretos y pensando en la medida dinámica del intervalo QT. Este detector presenta una rapidez de cálculo deseable en el procesado de gran cantidad de datos. Sus deficiencias en cuanto a falsos positivos y falsos negativos se corrigen con el procedimiento de medida del intervalo QT (selección de valores de QT, apartado 3.3.4) en el caso de falsos positivos, y con la tolerancia a falsos negativos en el entendido que se pierde información puntual pero no dinámica.

Este tipo de consideraciones hacen que el detector propuesto sea muy específico y poco flexible para otro tipo de medidas que no sean el intervalo QT. Por otro lado, el requisito de rapidez de cálculo es algo deseable pero no un obstáculo insalvable, ya que la velocidad de procesado se mejora constantemente con tecnologías electrónicas más rápidas y una realización más eficiente. Por esto se ha considerado el diseño de un detector que, aun sin olvidar en lo posible la velocidad de cálculo, pone el énfasis en su robustez e incorpora una etapa de selección de latidos en función de su morfología. Este último aspecto no se considera normalmente en los detectores de QRS, pero resultará muy útil cuando se pretenda obtener información cardiaca mediante el análisis global de la señal. En estos casos, latidos excepcionalmente ruidosos o anormales serán indeseables y un detector que sea capaz de rechazarlos se presenta como una herramienta de gran utilidad.

Con este objetivo se propone un detector selectivo de QRS que resulta ser más robusto en si mismo. Este detector se basa en el ya propuesto por Jané (1989a) sobre el que se han realizado determinadas modificaciones en la parte del procesado no lineal con el objetivo de optimizar la detección. Respecto al detector específico, éste incorpora una etapa no lineal, se modifica la etapa lineal, la regla de decisión se hace más robusta y se incorpora una etapa de selección de latidos. En la etapa de procesado no lineal se considera un filtro adaptado², que es óptimo cuando el ruido es blanco (Lynn, 1982), en el sentido de maximizar la SNR, parámetro éste relevante para la detección. Esta se realizará tanto en la señal salida del filtro lineal como en la señal que resulta de la transformación no lineal. Una correcta detección será aquella que lo sea en las dos

²En ingles "Matched filter"

señales y cumpla los requisitos de selección.

A continuación se describe en detalle este detector.

3.4.1 Preprocesado

Primeramente se considera el filtrado lineal, que corresponde a un filtro paso banda para realzar el contenido frecuencial del QRS. Sobre esta señal, y teniendo en cuenta información sobre su derivada, actuará en primer lugar la regla de decisión. La señal resultante del filtrado paso banda y posterior derivación es sometida a una transformación no lineal, que consiste en elevar al cuadrado la derivada y convolucionarla con una estimación de ella misma sobre un QRS detectado en el paso previo. La regla de decisión actuará nuevamente sobre la señal resultante de la convolución.

Filtrado lineal

Este filtrado lineal consta de un filtro paso banda, realizado con un paso alto en cascada con uno paso bajo. Sobre la señal resultante se realiza la derivación (figura 3.20)

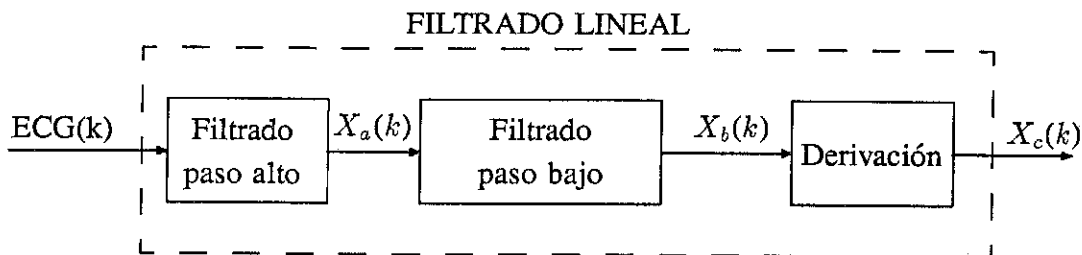


Figura 3.20: Diagrama de bloques del procesamiento lineal para el detector selectivo de QRS.

Los filtros paso alto y paso bajo se construyen haciendo uso de los filtros Lynn descritos en 3.2.2.1.

El filtro paso bajo es un filtro Lynn recursivo de segundo orden para atenuar el

primer lóbulo secundario (Lynn, 1977), y cuya función de transferencia en z es

$$H_1(z) = \frac{(1 - z^{-m})^2}{(1 - z^{-1})^2}, \quad (3.24)$$

la ecuación en diferencias tiene la forma

$$X_b(k) = 2X_b(k-1) - X_b(k-2) + X_a(k) - 2X_a(k-m) + X_a(k-2m), \quad (3.25)$$

y la respuesta frecuencial puede expresarse como

$$H_1(\omega T) = \frac{\sin^2(\frac{m\omega T}{2})}{\sin^2(\frac{\omega T}{2})} e^{-j(m-1)\omega T}. \quad (3.26)$$

El retardo introducido es de $m-1$ muestras, y para $\omega \rightarrow 0$ la ganancia vale m^2 . El valor de m se ha seleccionado de modo que el primer cero del filtro $f_0 = \frac{1}{mT}$ esté a 60 Hz, lo cual supone una frecuencia de corte (-3 dB) $f_c \simeq 18$ Hz. En la figura 3.21 se representa de la ganancia de este filtro para $f_m=1000$ Hz y normalizando a una ganancia unidad.

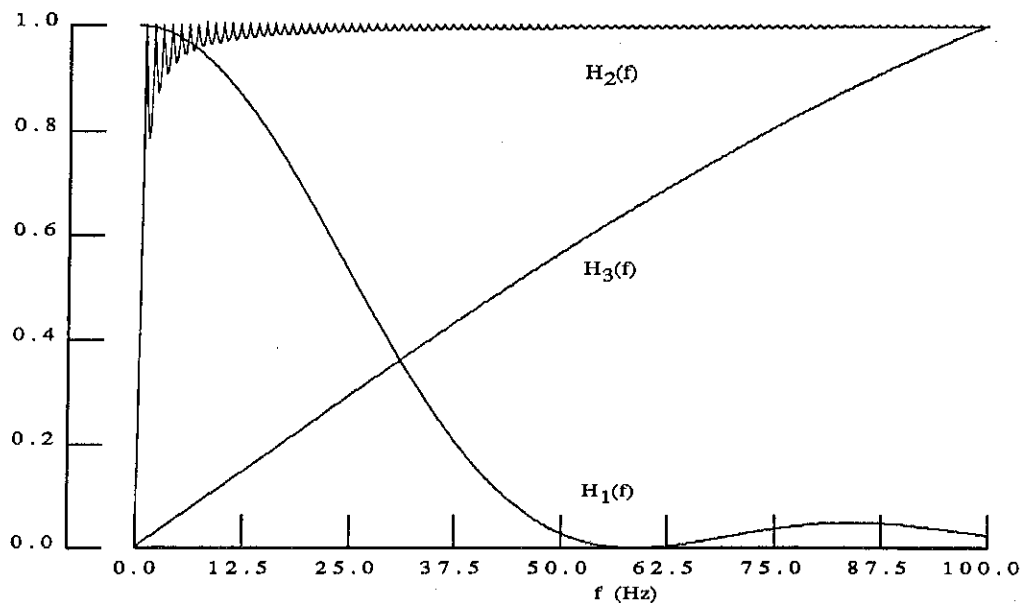


Figura 3.21: Respuesta frecuencial de los filtros paso alto $H_2(f)$, paso bajo $H_1(f)$, y derivador $H_3(f)$, para una frecuencia de muestreo $f_m = 1000$ Hz y ganancia unitaria.

El filtro paso alto se ha realizado con una configuración en paralelo de un filtro paso todo y un filtro paso bajo de primer orden del mismo tipo que el descrito anteriormente.

Su función de transferencia en z es

$$H_2(z) = mz^{-(m-1)/2} - \frac{(1 - z^{-m})}{(1 - z^{-1})}, \quad (3.27)$$

donde $mz^{-(m-1)/2}$ corresponde al filtro paso todo y $(1 - z^{-m})/(1 - z^{-1})$ al filtro paso bajo. La ecuación en diferencias toma la expresión

$$X_a(k) = X_a(k-1) - ECG(k) + m ECG\left(k - \frac{m-1}{2}\right) - m ECG\left(k - \left(\frac{m-1}{2} + 1\right)\right) + ECG(k-m) \quad (3.28)$$

y la respuesta frecuencial es

$$H_2(\omega T) = \left[m - \frac{\sin\left(\frac{m\omega T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)} \right] e^{-\left(\frac{m-1}{2}\right)\omega T} \quad (3.29)$$

El retardo del filtro es de $(m-1)/2$ muestras y la ganancia para altas frecuencias, $\omega \rightarrow 2\pi f_m/2$, tiende a m . La elección de este parámetro m se hace de modo que $f_0 \simeq 1$ Hz para cualquier f_m . La figura 3.21 muestra la función de transferencia para este filtro con $f_m = 1000$ Hz. La figura 3.22 representa la ganancia del filtro paso banda resultante de la composición de ambos.

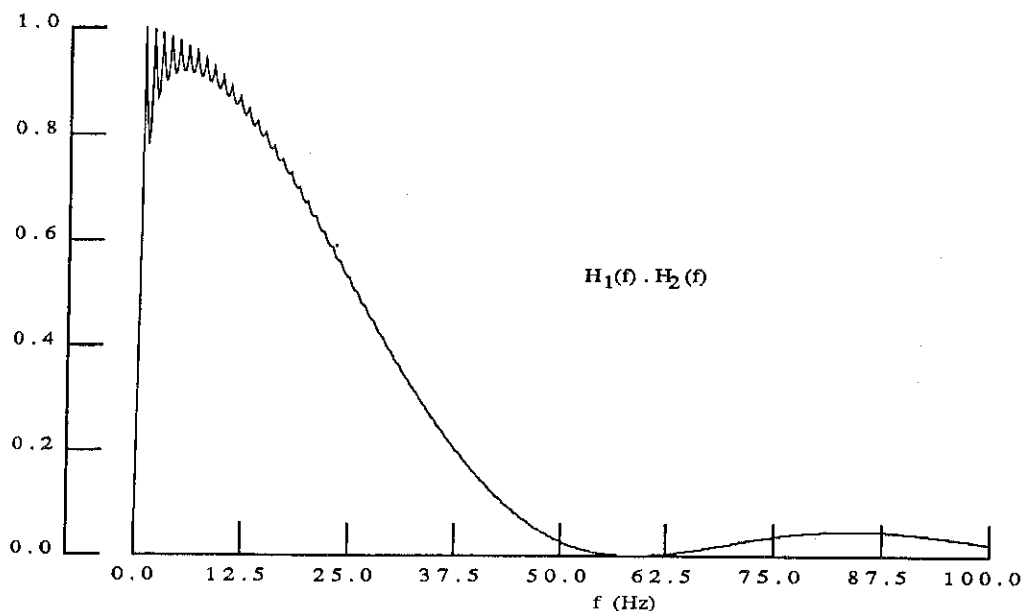


Figura 3.22: Respuesta frecuencial del filtro paso banda, composición del paso bajo $H_1(f)$ y paso alto $H_2(f)$, para una frecuencia de muestreo $f_m = 1000$ Hz.

La derivada se realiza con un filtro derivador paso bajo. En este caso, y dado que la señal ha sido filtrada paso banda previamente, se toma un derivador que actúa como tal hasta frecuencias por encima de las propias del QRS. Así se asegura que no distorsiona en ningún caso el QRS. El filtro considerado tiene una función de transferencia en z dada por

$$H_3(z) = \frac{1}{8T}(1 + 2z^{-1} - 2z^{-3} - z^{-4}). \quad (3.30)$$

La ecuación en diferencias es

$$X_c(nT) = \frac{1}{8T} (X_b(k) + 2X_b(k-1) - 2X_b(k-3) - X_b(k-4)). \quad (3.31)$$

La respuesta en frecuencia puede expresarse como

$$H_3(\omega T) = j \frac{1}{4T} (\sin(2\omega T) + 2 \sin(\omega T)) e^{-j2\omega T}. \quad (3.32)$$

El efecto paso bajo se notará a frecuencias superiores a $f_m/8$. El retardo es de 2 muestras y su comportamiento a bajas frecuencias corresponde al de un derivador ideal:

$$\left. \frac{dH_3(\omega T)}{d\omega} \right|_{\omega T = 0} = j \quad (3.33)$$

En la figura 3.21 se ve la respuesta frecuencial de este filtro derivador para $f_m = 1000$ Hz. Prácticamente hasta $f \simeq 30$ Hz la respuesta coincide con la del derivador ideal.

Transformación no lineal.

Como etapa no lineal se ha tomado la transformación ya discutida en el apartado 3.2.1.2 (figura 3.23)

Esta transformación se expresa como

$$X_c(n) = \sum_{k=n-N+1}^n X_c^2(k) h(n-k). \quad (3.34)$$

La respuesta impulsional $h(n)$ es la estimación de $X_d(n)$ para un QRS de los detectados sobre la señal paso banda $X_b(n)$. Este filtro constituye un filtro adaptado según la propia forma de la señal y cuya respuesta impulsional es la propia estimación del complejo QRS invertida en el tiempo. Si la posición de un QRS detectado en la señal paso banda está en la muestra k_0 entonces

$$h(n) = \begin{cases} X_d(k_0 - \frac{N}{2} + n) & n = 0, \dots, N-1 \\ 0 & \text{otros valores de } n \end{cases} \quad (3.35)$$

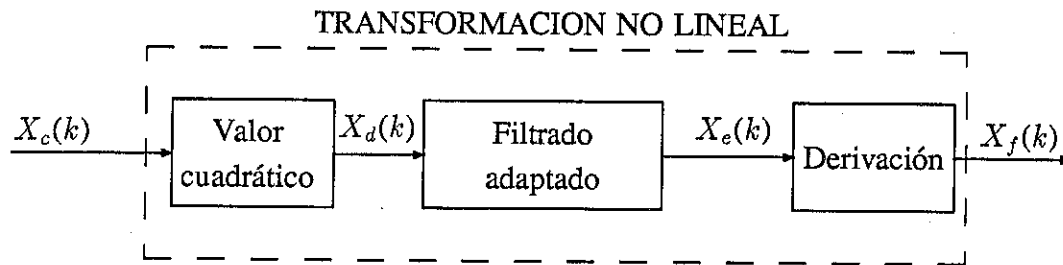


Figura 3.23: Diagrama de bloques de la transformación no lineal para el detector selectivo de QRS.

La selección de N fija la anchura que se considera para la respuesta impulsional del filtro, tomando en este caso la equivalente a 300 ms. Este valor recoge toda la información del QRS que se toma como plantilla del filtro adaptado. El QRS que se toma como modelo puede variarse a lo largo del tiempo o incluso tomar un cierto valor medio. En este trabajo se ha tomado el segundo QRS detectado, ya que el primero puede no estar completo en el ECG original.

Después de esta transformación se aplica nuevamente el filtro derivador, ya que la regla de decisión hace uso de una señal ($X_e(kT)$) y su derivada ($X_f(kT)$).

3.4.2 Regla de decisión

La regla de decisión actúa como la descrita en 3.2.2.2, pero con las siguientes modificaciones:

1. Actúa sobre la señal filtrada paso banda y sobre la señal después de la transformación no lineal.
2. Se usan dos umbrales UMB1, UMB2 que se calculan en función de los picos de señal (PSEN) y de ruido (PRUI).
3. El periodo refractario vale 200 ms a partir de la posición del QRS anterior.
4. Para aceptar un pico (PICACTION) como un QRS, éste deberá ser mayor que un umbral y su pendiente (PENPIC) deberá estar entre unos valores definidos por

la pendiente de los QRS anteriores (PENQRS).

Un esquema de bloques para la inicialización de esta regla de decisión se presenta en la figura 3.24. El proceso de detección se muestra en la figura 3.25.

INICIALIZACION DE LA REGLA DE DECISION

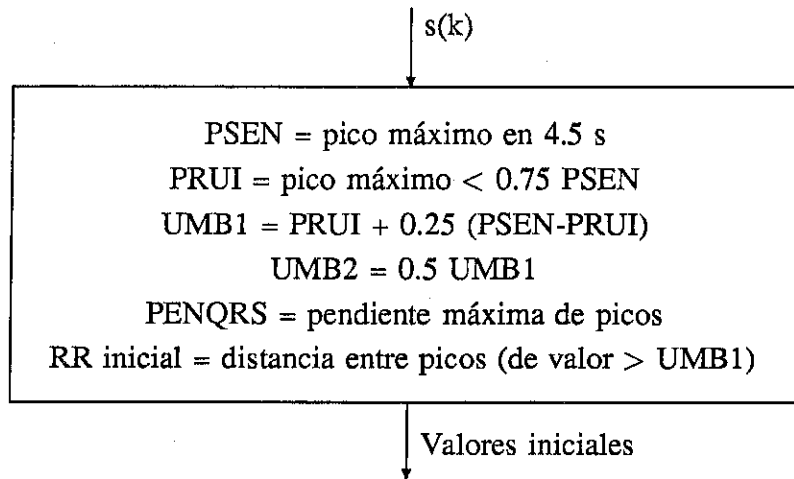


Figura 3.24: Diagrama de bloques de la inicialización de la regla de decisión del detector selectivo de QRS.

$s(k)$ es la señal sobre la que actúa la regla de decisión. Se inspeccionan los 4.5 primeros segundos de la señal, sobre ellos se inicializan los parámetros y se decide si el umbral es positivo o negativo en función del valor de los picos mas grandes de la señal.

Al finalizar este punto se tienen dos conjuntos de posibles posiciones de QRS: las obtenidas sobre el ECG filtrado paso banda (QRS_{PB_i}) y las obtenidas sobre la señal después de la transformación no lineal (QRS_{TN_i}). Con estos conjuntos de posiciones se pasa a realizar la selección de latidos.

3.4.3 Selección de latidos

Esta nueva etapa, dentro lo que sería un detector clásico de QRS, pretende rechazar los latidos detectados por la regla de decisión que están fuera de la tendencia media en cada

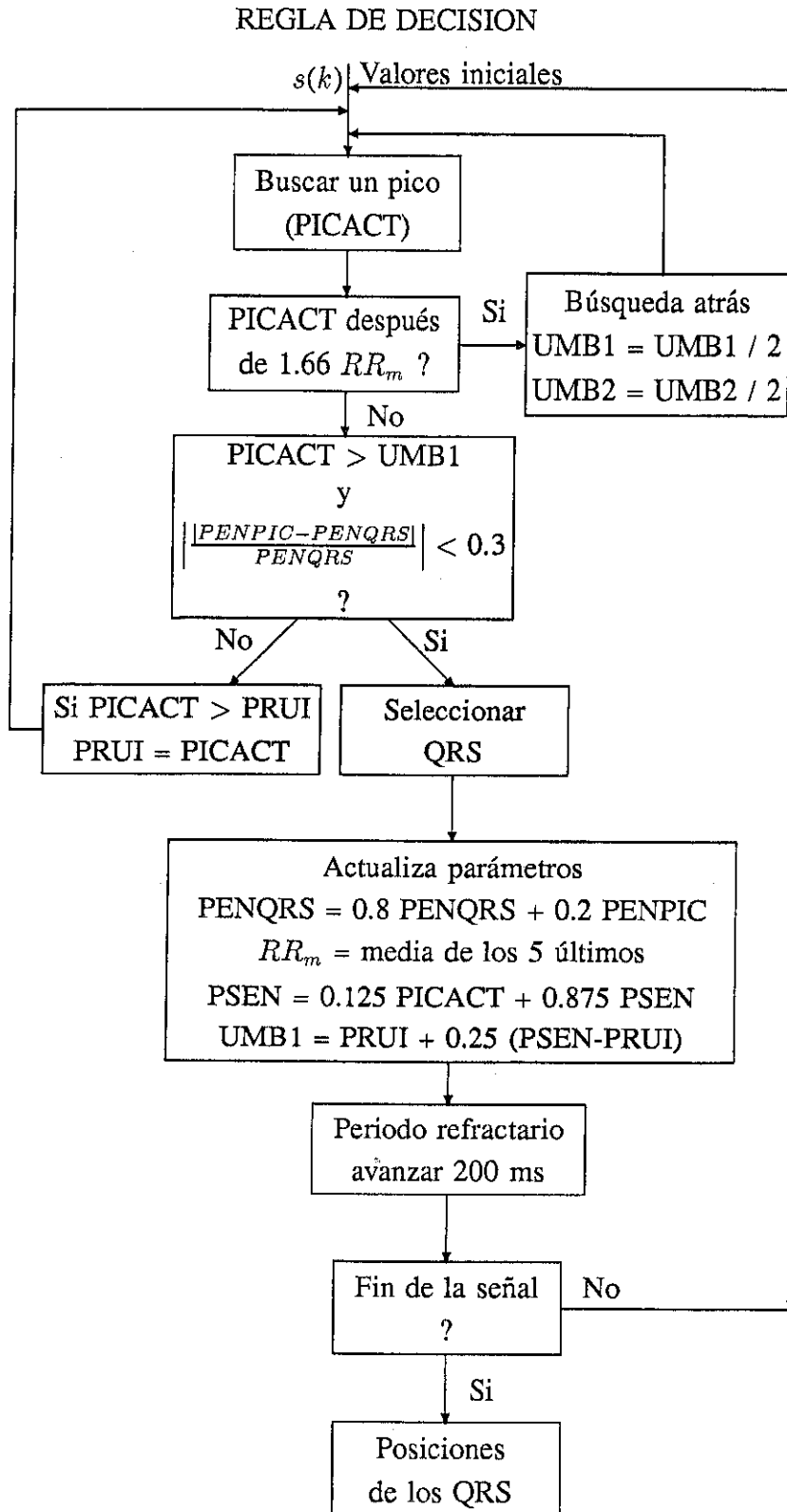


Figura 3.25: Diagrama de bloques de la regla de decisión del detector selectivo de QRS.

momento. Esto no quiere decir que los latidos que se rechazan no pertenezcan a latidos físicos reales, sino que, por las condiciones de ruido en el momento de producirse o por alteraciones repentinas del sistema cardiaco, presentan una morfología anormal que interesa rechazar.

Tres son los criterios de selección de latidos que se consideran:

1. Amplitud media de la señal (A_m) en la posición del QRS.
2. Duración media de la señal (D_m) en la posición del QRS, cuando ésta toma un valor de 0.2 de la amplitud del QRS (A).
3. Confrontación de posiciones en la señal paso banda (QRS_{PB_i}) y filtrada no lineal (QRS_{TN_i}).

Los latidos se rechazan si su amplitud A o duración D están fuera de ciertos márgenes, definidos en función del valor medio hasta ese momento. Además, se exige que hayan sido detectados correctamente en las dos señales sobre las que se aplicó la regla de decisión. La figura 3.26 muestra el diagrama de bloques para esta selección, donde los subíndices PB y TN hacen referencia a la señal paso banda y transformada no lineal, respectivamente.

3.4.4 Ejemplos de aplicación

En esta sección se verá cómo actúa este detector selectivo sobre las mismas señales sobre las que se aplicó el detector específico para QT, considerando una frecuencia de muestreo $f_m = 1000$ Hz. Ello constituye un caso particular, ya que todos los filtros, regla de decisión, selección y todo el detector en general, se han desarrollado como una función genérica de f_m , lo cual proporciona mucha mayor versatilidad.

En la figura 3.27 se representa la misma señal ECG de la figura 3.6 con todas las señales intermedias del procesado. Sobre la señal filtrada paso banda X_b están marcadas las posiciones QRS_{PB_i} , y sobre la señal transformada no lineal X_e las posiciones QRS_{TN_i} . Las posiciones ya seleccionadas QRS_i están indicadas en la señal ECG original. La señal más baja ($X_{e'}$) corresponde a la señal X_e usando la transformación

SELECCION DE LATIDOS

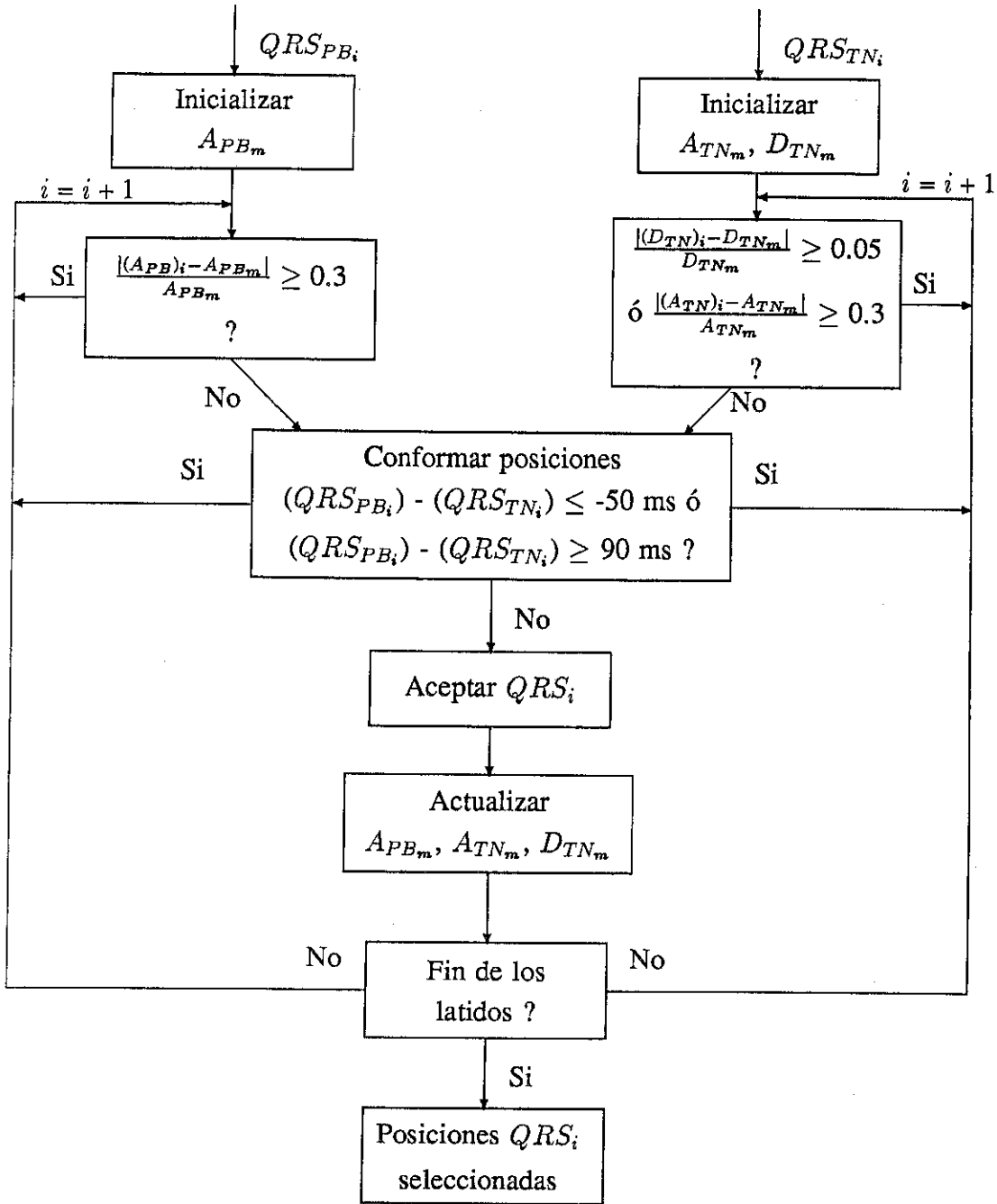


Figura 3.26: Diagrama de bloques para la selección de latidos del detector selectivo de QRS.

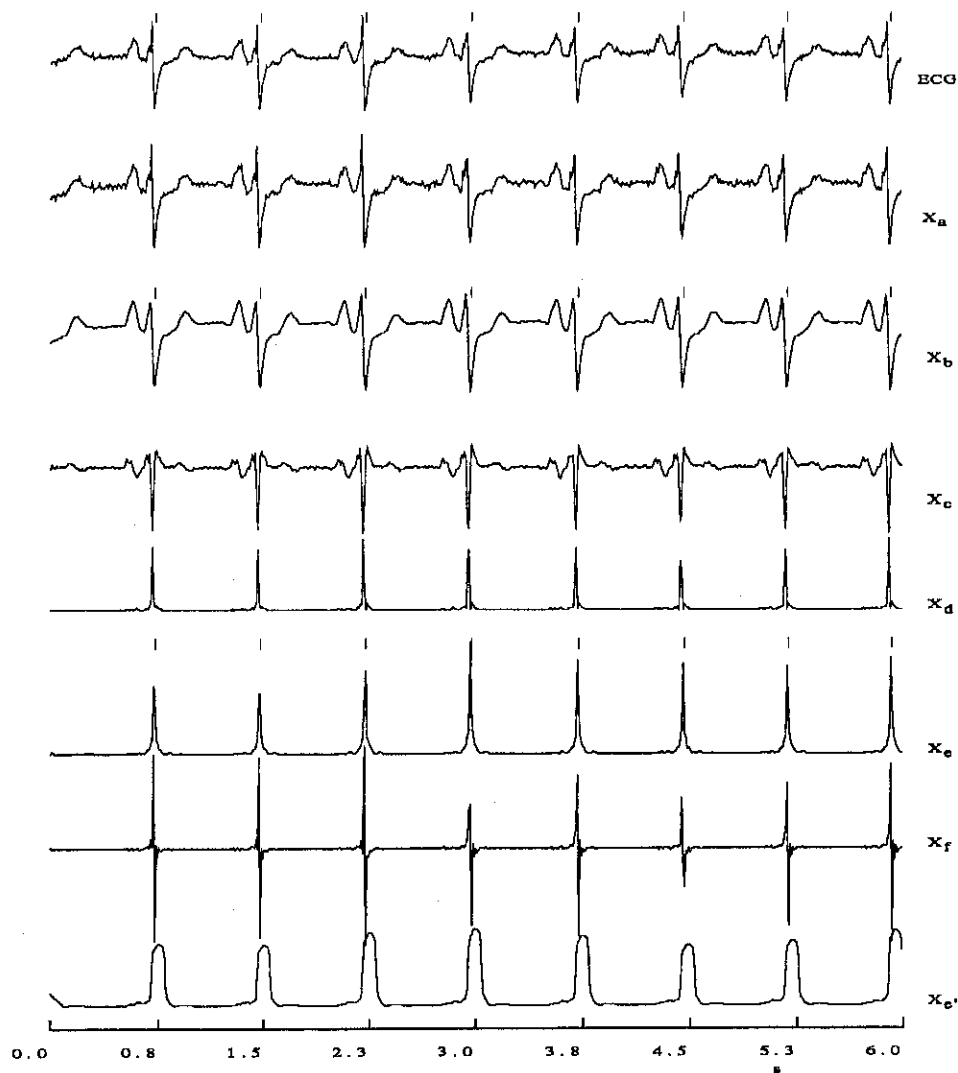


Figura 3.27: Señales obtenidas para las diferentes etapas de procesado del detector delectivo de QRS.

Sobre la señal ECG original están las marcas de las posiciones de los QRS seleccionados, sobre la señal filtrada paso banda (X_b) están las posiciones (QRS_{PB_i}) y sobre la señal transformada no lineal (X_e) están las posiciones (QRS_{TN_i}). Por último $X_{e'}$ es la señal que resulta de usar la transformación no lineal de la ecuación 3.3. Nótese cómo la definición de la posición de los QRS es más precisa en la transformación propuesta en este detector (señal X_e) que en la que resultaría de usar $X_{e'}$.

de corta energía de la ecuación 3.3 (Pan y Tompkins, 1985; Jané, 1989a) con una N equivalente a 95 ms, suficientemente grande de acuerdo con la duración habitual de los QRS. Puede apreciarse cómo la definición de los picos para detectar las posiciones de los QRS es más nítida en X_e , obtenida con la transformación de filtrado adaptado propuesta en este detector, que en X_e' . En las figuras 3.28 y 3.29 se ven las señales de

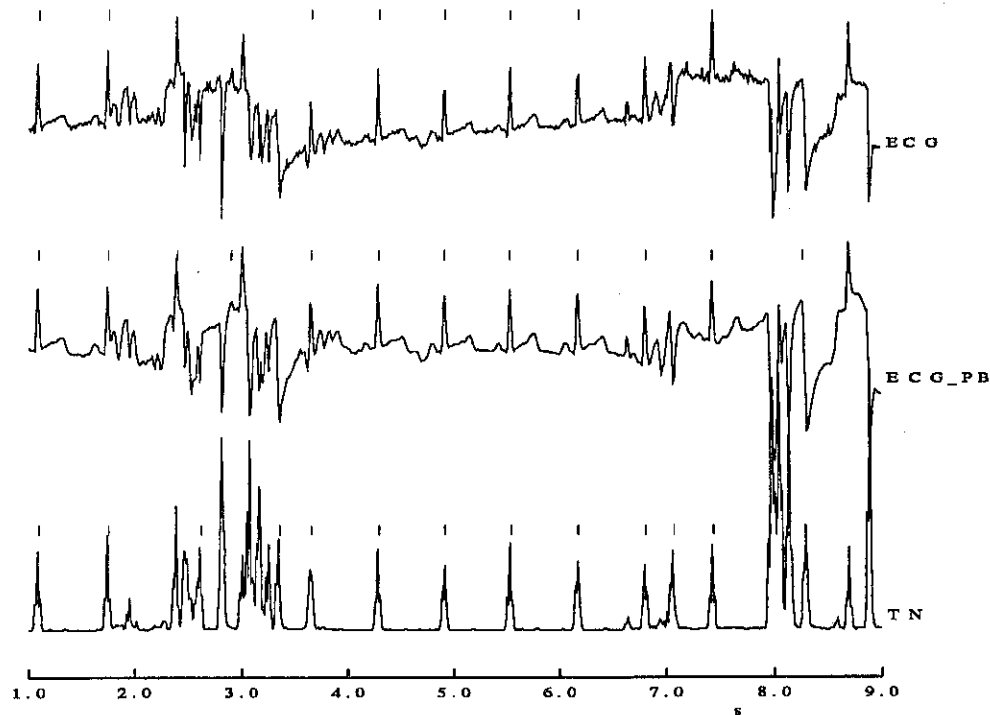


Figura 3.28: Actuación del detector selectivo de QRS sobre un ECG con fuerte actividad muscular.

la figura 3.7 y 3.8, respectivamente, y cómo actúa sobre ellas el detector selectivo de QRS. Se representa la señal paso banda y la transformada no lineal con las detecciones realizadas sobre ellas y los QRS seleccionados sobre el ECG original. En la figura 3.28 se observa claramente que los latidos con forma muy diferente son rechazados en la etapa de selección. En la figura 3.29 se ve cómo la detección sobre la señal filtrada paso banda se realiza sobre el QRS y no sobre la onda T que tiene mayor amplitud que el QRS. Esto se debe a la introducción del criterio de la derivada en la regla de decisión, resultando así mucho más fiable el detector.

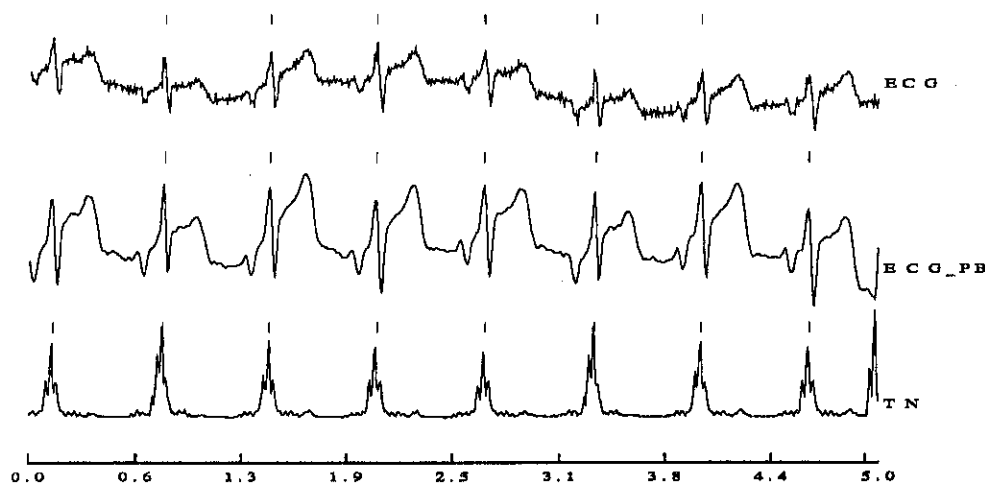


Figura 3.29: Actuación del detector selectivo de QRS sobre un ECG con ondas T de mayor amplitud que el QRS.

3.5 Conclusiones

En el presente capítulo se han abordado los problemas de detección del complejo QRS en la señal ECG y la identificación o medida del intervalo QT.

La detección de los complejos QRS es un paso previo para cualquier procesado de ECG, por lo que ha sido ampliamente estudiado en la literatura. En este trabajo se ha presentado un detector específico para medida del QT en registros de larga duración, y otro más robusto que incorpora una etapa de selección de latidos.

El detector de QRS para medida del intervalo QT es rápido en tiempo de proceso, aunque no tiene gran robustez frente a falsos positivos, ya que éste no es su objetivo. Una posterior selección de valores de QT en el algoritmo de medida de este intervalo, evita medidas erróneas dadas por los falsos positivos. Esta limitación lo convierte en un detector de uso específico pero muy útil en este caso. Este detector facilita una posterior definición del inicio del QRS y final de la onda T, dadas sus especiales características como son el uso de los filtros LPD propuestos en el capítulo 2 y la propia forma de detectar la posición del QRS (regla de decisión).

Respecto a la identificación y medida del intervalo QT, se ha propuesto y desarrollado

un algoritmo nuevo cuya precisión es comparable a la de otros existentes (Algra y otros, 1987; Pisani y otros, 1985) y a medidas manuales. Sin embargo, el algoritmo aquí propuesto presenta una notable mejora en cuanto a su inmunidad frente a las interferencias de la línea de base, cuando ésta difiere de una línea plana después del final de la onda T. Esta situación desgraciadamente es bastante común en registros de Holter, donde el paciente no está en reposo y puede estar en entornos que generan gran cantidad de interferencias. Otros algoritmos existentes para definir los límites del complejo QRS (Nygårds y Sörnmo, 1983) presentan una cantidad significativamente mayor de cálculos con un comportamiento comparable al del algoritmo propuesto en este trabajo.

El problema de selección y rechazo de latidos ectópicos y otras anomalías puntuales se resuelve mediante una selección de latidos en función del valor del intervalo QT medido. Cuando haya presente taquicardia ventricular o fibrilación ventricular, el algoritmo proporcionará valores de QT sin sentido, dado que el intervalo QT no está definido en estos casos y la anomalía se presenta de forma secuencial y continua. En estos casos se requeriría la incorporación de un detector de arritmias que rechazase la parte de señal afectada. También en secuencias de ECG con muy baja SNR pueden obtenerse valores erróneos del QT. Sin embargo, si estas secuencias duran sólo un pequeño número de latidos, los criterios de rechazo minimizan el problema.

También se ha considerado la medida del intervalo QTP, lo cual puede realizarse con mayor precisión que la correspondiente al intervalo QT en los casos en que la onda T tenga un pico bien definido. Un estudio para comprobar la significación clínica de este intervalo comparado con el QT permitiría considerar el valor del QTP en lugar de QT, caso de ser igualmente significativos, consiguiéndose mayor precisión y garantía en las medidas. En el capítulo siguiente se presentará un estudio que mostrará la tendencia de estos intervalos en distintos grupos de pacientes.

El detector de QRS con selección de latidos presenta un mayor tiempo de cálculo, pero su comportamiento en cuanto a robustez es mucho mejor y constituye un detector de propósito general sin más que eliminar la etapa de selección de latidos. La etapa de transformación no lineal incorpora el filtrado adaptado, de modo que la detección resulta óptima en el sentido de maximizar la SNR. La regla de decisión lleva asociada información sobre la derivada, lo que evita la detección de ondas T como falsos

QRS. Por último, este detector permite la selección de latidos según su morfología, característica de gran utilidad en medidas que hacen uso recursivo de varios latidos y de la información en la onda completa (promediado de señal, filtrado adaptativo, ...).

La medida de intervalos con procedimientos de identificación de los puntos significativos (inicios y finales de las ondas características del ECG), en general, está muy sujeta al error en la determinación de estos puntos. En muchos casos la información que se necesita viene definida por este tipo de intervalos (v. gr. QT) y por ello se hacen necesarios algoritmos con estos objetivos. Sin embargo, existen otros tipos de medidas o intervalos cuya magnitud puede determinarse haciendo uso de la información presente en toda la onda (señal), en lugar de mediante la definición de los puntos significativos de dicha onda. Este es el caso del intervalo RR, PP, TT, PR etc., que son distancias entre ondas y que pueden abordarse desde el punto de vista de métodos de estimación del tiempo de retardo entre señales transitorias de la misma forma. En el capítulo 5 se verá un método alternativo para definir este tipo de intervalos y se analizará su comportamiento frente al ruido.

Capítulo 4

MEDIDA AUTOMÁTICA DEL INTERVALO QT

4.1 Introducción

Una de las principales causas de muerte en los países desarrollados son las enfermedades del corazón. Aproximadamente la mitad de las muertes producidas por problemas cardíacos ocurren como muertes súbitas (Kannel y otros, 1975), que aparecen de forma repentina y no existe modo de establecer un diagnóstico previo eficiente y con un alto margen de fiabilidad. Por ello es muy importante encontrar parámetros que permitan predecir los procesos de muerte súbita.

Según algunos autores, el sistema nervioso autónomo juega un papel importante para explicar un proceso de muerte súbita (Coumel y otros, 1982). Las alteraciones del sistema nervioso autónomo modifican la relación entre el tono simpático y el tono vagal. Estas alteraciones disminuyen la variabilidad del ritmo cardíaco (HRV)¹, medido a través de la variabilidad del intervalo RR, y prolongan la duración del intervalo QT. Ambos hechos están relacionados con la aparición de arritmias ventriculares malignas (AVM) (taquicardia ventricular sostenida o fibrilación ventricular en la fase subaguda del infarto de miocardio) que desencadenan los procesos de muerte súbita (Brooks y

¹En inglés "Heart rate variability"

otros, 1978; Browne y otros, 1982; Kleiger y otros 1987; Schwartz y otros 1978).

En este capítulo se aplica el procedimiento de medida automática de los intervalos RR, QT, QTP, QT_c y QTP_c presentado en el capítulo 3, considerando registros de señal ECG grabados en cinta magnética con un sistema Holter analógico. Sobre estos registros se han medido automáticamente los intervalos antes mencionados, y a modo de ejemplo se presenta un estudio comparativo de éstos en los diferentes grupos de pacientes seleccionados. Se analiza la tendencia que los resultados muestran en cuanto al valor predictivo de muerte súbita de los distintos intervalos considerados.

Entre los pacientes analizados hay un grupo de ellos que no tiene ninguna enfermedad cardíaca, y dos grupos más que han sufrido un infarto de miocardio. Uno de estos grupos no presentó posteriormente al infarto un proceso de muerte súbita y el otro si. Se ha considerado el valor del intervalo QT como parámetro para separar pacientes que evolucionan de distinto modo después del infarto (diferentes grupos considerados). Los parámetros utilizados son tanto el valor medio del QT_c en 24 horas ($\overline{QT_c}$), como el tanto por ciento de latidos durante este período cuyo valor de QT_c es superior a un cierto umbral. Análogamente se hace con los demás intervalos definidos. Los resultados se analizan desde el punto de vista de la tendencia estadística y con la limitación que el reducido número de pacientes impone para la generalización de los resultados. Sin embargo, las predicciones realizadas a partir de resultados previos obtenidos con medición manual (Martí y otros, 1988) han sido confirmados por los resultados determinados automáticamente (Laguna y otros, 1989a), mostrándose que el QT_c tiene un cierto valor predictivo.

La razón de ser de un estudio de este tipo está en el desconocimiento parcial que se tiene, tanto del funcionamiento fisiológico del corazón, como de los mecanismos que lo regulan. Si todo ello fuera bien conocido e interpretado, se estaría ante la información precisa que permitiría predecir una evolución desfavorable de un paciente determinado y aplicar medidas preventivas. Esta situación no se da en la actualidad, y por ello se recurre a métodos indirectos de predicción, como pueda ser una anormal prolongación del intervalo QT_c o disminución de la HRV. Estos estudios son empíricos y permiten ayudar al diagnóstico de enfermedades cardíacas sin que se conozca profundamente la relación entre ellos y la enfermedad. Generalmente la confirmación del valor de estos parámetros como marcadores viene dada por la experiencia y estudios sobre un gran

número de pacientes. Por ello siempre se considera su información en términos de probabilidad y no de forma absoluta.

Toda esta problemática constituye un campo de investigación apasionante desde el punto de vista médico y fisiológico, al cual se están dedicando actualmente grandes esfuerzos. Desde el punto de vista técnico, el desarrollo de métodos de medida automática de los parámetros relacionados con el comportamiento fisiológico es un objetivo al que actualmente están dedicados muchos grupos de investigación.

En el presente capítulo, y además del análisis de los distintos intervalos de QT, se presenta un estudio de la relación entre los intervalos QT y QTP en los pacientes considerados, y el valor de un índice temporal de HRV como indicador de muerte súbita, comparándolo con el del QT.

Como ya se vio en el capítulo 3, la medida del intervalo QTP es más precisa, cuando ésta es posible realizarla, que la correspondiente al intervalo QT. Por ello, si la significación clínica fuera la misma, sería mejor usar el valor del QTP en lugar del QT como indicador de patologías. El análisis de la relación entre QTP y QT en los diferentes pacientes considerados lleva a comprobar que en algunos casos el QTP puede ser usado para obtener una medida más precisa del QT. Por si sólo, el valor del QTP pierde información de la evolución del tiempo de despolarización y posterior repolarización de las células miocárdicas de los ventrículos.

La HRV (Kitney y otros, 1980) ha sido considerada como un índice de mortalidad después de un infarto de miocardio (Kleiger y otros, 1987). A partir de las posiciones de la onda R, dadas por el detector diseñado, puede calcularse la HRV en cada paciente, y comparar su valor para estratificar pacientes postinfarto de miocardio (PPIM) con el valor del QT. En este estudio se ha seleccionado el índice global SD(RR) (Myers y otros, 1986).

4.2 Parámetros indicadores de muerte súbita

A continuación se presenta una discusión sobre la significación fisiológica de los dos índices (QT y HRV) que se van a medir sobre los registros ECG de los pacientes considerados.

4.2.1 El intervalo QT

El intervalo QT es la representación electrocardiográfica del tiempo de despolarización y posterior repolarización de los ventrículos en un latido cardiaco. Este intervalo resulta de la suma algebraica de cada potencial de acción de las células del miocardio en los dos ventrículos. En la figura 4.1 se observa cómo la suma de estos potenciales desfasados en el tiempo generan el complejo QRS y la onda T. La distancia entre el inicio del QRS y el final de la onda T define el intervalo QT.

Un intervalo QT prolongado puede corresponder a un potencial de acción anormalmente largo en todas las células, y también a una situación de dispersión de los potenciales de acción, largo en unas células y normal en otras. En cualquier caso, la prolongación del intervalo QT refleja un aumento en el tiempo total de repolarización de los ventrículos, y esta situación constituye un sustrato propicio para la aparición de taquicardias reentrantes o arritmias ventriculares. Generalmente se considera un QT_c anormalmente largo cuando éste es mayor de 440 μ (Chou, 1986). Este incremento de tiempo es a menudo el resultado de una hipertrofia del tejido ventricular o de defectos de conducción en este tejido. La prolongación del QT_c tiene peores consecuencias que un acortamiento de este intervalo en cuanto a la aparición de patologías cardiacas.

La prolongación del intervalo QT_c puede ser bien adquirida o bien inherente. Generalmente, prolongaciones adquiridas del QT_c se dan junto con taquicardia ventricular y fibrilación ventricular (Chou, 1986; Roberts y otros, 1986; Puddu y otros, 1986; Butrous, 1986). Dado que la fibrilación ventricular es la primera causa de muerte súbita (Norris, 1986), la mayoría de las investigaciones tratan de mostrar el significado clínico de la prolongación del intervalo QT y su relación con las arritmias ventriculares y la muerte súbita.

Aunque el intervalo QT es el que representa el tiempo total de repolarización de los ventrículos, muchas veces los picos de la onda T definen instantes de tiempo que se puede determinar con mayor precisión (Critelli y otros, 1982). El pico de la onda T corresponde al instante temporal en el que mayor es la diferencia entre el número de células que han acabado la fase de repolarización o están cerca del potencial de reposo, y aquellas que todavía están en la región plana de despolarización o cerca de ella (figura 4.1) (Webster, 1978). Si las variaciones del intervalo QT latido a latido

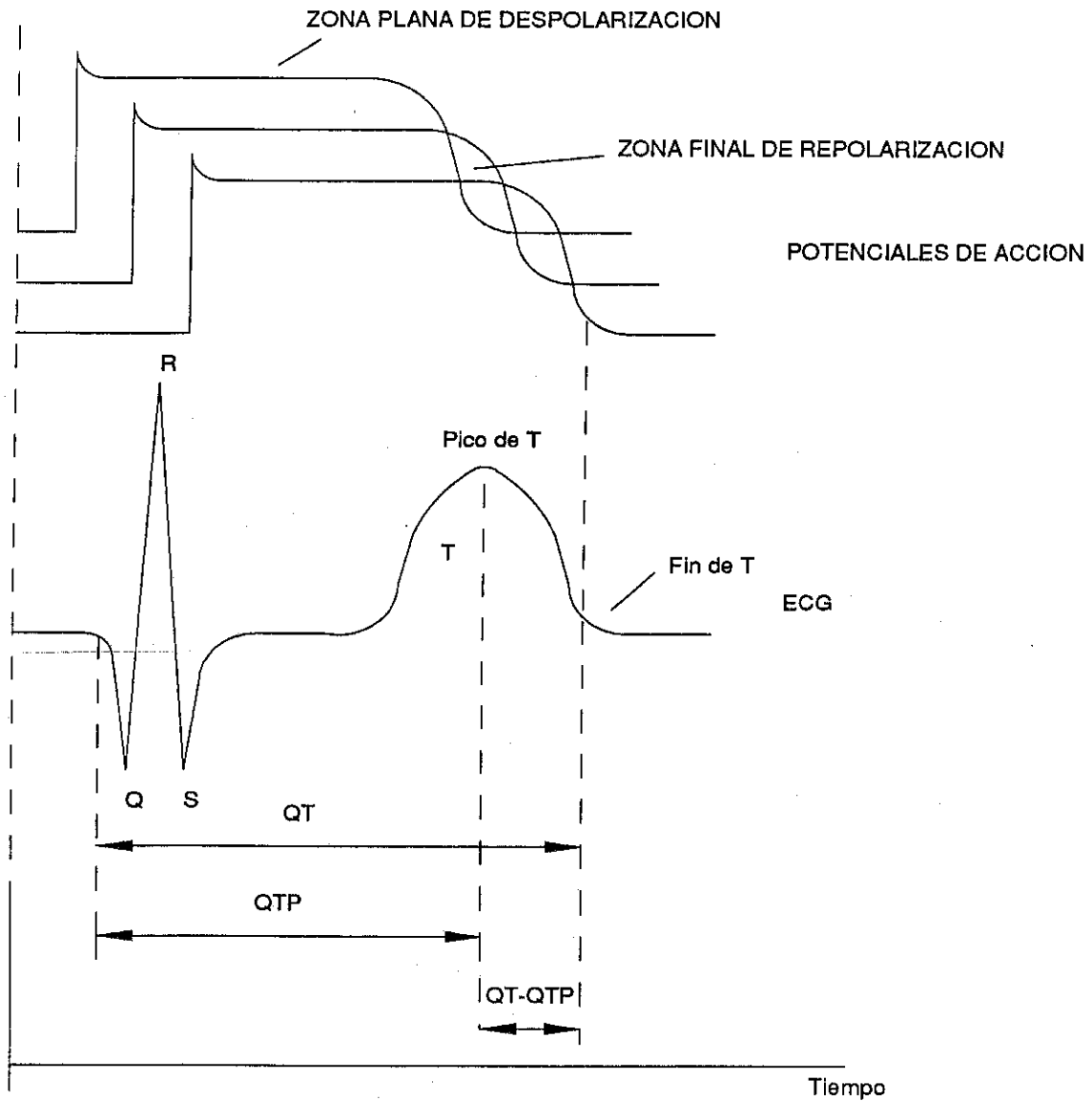


Figura 4.1: La señal ECG como suma algebraica de los potenciales de acción.

La suma algebraica de todos estos potenciales, desfasados en el tiempo de unas células a otras, forman la señal ECG. La onda T se da al final de la repolarización. Nótese que el pico de la onda T ocurre cuando mayor es la diferencia entre el número de células que están en la región plana o próximas a ella, y las que ya están repolarizadas o en la fase final de repolarización.

sólo implican variaciones de duración en la región plana de los potenciales de acción, esto es, no existe retardo entre el potencial de unas células y el de otras respecto a la situación en que el QT era más corto, se puede obtener la misma información midiendo el intervalo QT que el QTP. Si los cambios se dan en la fase final de la repolarización, o si lo que ocurre es una dispersión de los potenciales de acción de diferentes células en el tiempo, entonces las variaciones del intervalo QTP perderán información respecto a las del QT. Para analizar esto se estudiará el intervalo QT-QTP en relación con el QT y QTP (figura 4.1).

4.2.2 Variabilidad del ritmo cardiaco (HRV)

La variabilidad del ritmo cardiaco (HRV) es una medida de la rapidez o lentitud con que varía el intervalo RR a lo largo del tiempo. Pacientes con una buena función ventricular presentan una gran HRV, disminuyendo en pacientes con insuficiencia coronaria y fallo cardiaco. Además Kleiger y otros (1987) encontraron que pacientes con baja variabilidad del ritmo cardiaco después de un infarto de miocardio tienen una mayor mortalidad (50% cuando la variabilidad es < 50 ms y 15% cuando ésta es > 100 ms). Por ello, en el presente estudio se ha planteado la medida del HRV en los mismos pacientes que se ha medido el QT, y así poder comprobar, si es el caso, su valor predictivo. También se han considerado conjuntamente ambos índices para mejorar la predicción.

Para cuantificar la variación del ritmo cardiaco se han propuesto varios métodos en la literatura:

- La media de las desviaciones tipo del intervalo RR calculadas cada 5 segundos de señal, índice \overline{SD} (Magid y otros, 1985; Opmeer, 1973)
- La desviación tipo de los promedios de los intervalos RR obtenidos cada 5 minutos de señal, índice SDANN (Kleiger y otros, 1984)
- La desviación tipo del intervalo RR sobre todo el registro de ECG, índice global SD(RR) (Opmeer, 1973)
- Valor medio del número de latidos en cada hora cuyas diferencias de valor del RR latido a latido son mayores de 50 ms, índice BB50 (Ewing y otros, 1984)

- Espectro del intervalo RR (Myers y otros, 1986)

El objetivo de todos estos índices es poner de manifiesto lo más claramente posible los pacientes con diferentes patologías. Los métodos temporales son más cómodos de calcular, pero el índice basado en el espectro del ECG es el que más información recoge sobre la HRV.

En este estudio se considera el índice global SD(RR), ya que está definido de forma análoga a los índices de QT_c (valor medio en 24 horas).

4.3 Planteamiento del estudio

Como ya se ha comentado previamente, una anormal prolongación del intervalo QT_c puede ser asociada con arritmias ventriculares, síncope y muerte súbita. En un trabajo previo basado en medidas manuales (Martí y otros, 1988) se ha mostrado que la medida del intervalo QT_c puede ser un marcador de AVM y muerte súbita cardíaca.

En este estudio se consideran medidas automáticas de los distintos intervalos de QT y HRV sobre pacientes que posteriormente desarrollaron muerte súbita y otros que no. De este modo se puede analizar retrospectivamente la validez de estos intervalos y de la HRV como indicadores de esta situación, y eventualmente considerar estos parámetros en PPIM para prevenir una posible evolución de su enfermedad y clasificar los pacientes de acuerdo a esta posible evolución.

Los resultados se analizan desde el punto de vista estadístico, usando la prueba de la *t* de Student para medir el poder de separación de los pacientes en grupos con diferente evolución de su enfermedad, según cada parámetro considerado (Bradford, 1977).

4.3.1 Selección de pacientes

En este estudio se han seleccionado registros de ECG de Holter pertenecientes a los siguientes grupos de pacientes:

- Grupo A: 5 PPIM (A_i $i=1, \dots, 5$) que presentaron AVM durante o posteriormente al registro de Holter.
- Grupo B: 13 PPIM (B_i $i=1, \dots, 13$) que no presentaron AVM durante o posteriormente al registro de Holter
- Grupo C: 10 pacientes (C_i $i=1, \dots, 10$) sin enfermedades cardíacas y que constituyen un grupo de control.

Los pacientes se han seleccionado de modo que no se hubiese administrado ningún fármaco previamente al registro de Holter. Esta restricción es importante, dado que un tratamiento con fármacos antiarrítmicos tiene influencia sobre el intervalo QT, y estas variaciones inducidas podrían alterar el valor que eventualmente pueda tener el intervalo QT como marcador de riesgo después de un infarto de miocardio. Por las mismas razones no se han considerado pacientes con anormalidades en la conducción, tales como bloqueo de rama que también alargan el intervalo QT. Los pacientes con fibrilación auricular o con marcapasos también fueron rechazados. Todas estas restricciones hacen difícil tener gran número de pacientes, sobre todo en el grupo A, ya que generalmente se administran fármacos antiarrítmicos inmediatamente una AVM ha sido detectada. La edad de los pacientes está entre 40 y 70 años; la fracción de eyección en el grupo A oscila entre el 36% y el 40% con un valor medio de 38%, en el grupo B ésta varía de 26% a 49% con un valor medio de 37%, en el grupo C este valor no fue medido. El grado de incapacidad, de acuerdo con la "New York Heart Association", está entre I y II en ambos grupos, A y B. Todos los pacientes son varones, excepto uno en el grupo A que es hembra.

4.3.2 Sistema de adquisición de la señal

Las señales fueron grabadas con el mismo sistema descrito en el capítulo anterior y que consiste en un Holter ICR-6500 con una respuesta en frecuencia de 0.05-100 Hz (-3dB). Las cintas han sido leídas con un lector de cinta analógica (AIWA WX808) que tiene una respuesta en frecuencia de 20-16.000 Hz. La velocidad de lectura es 100 veces la velocidad de grabación, lo cual proporciona una respuesta en frecuencia equivalente de 0.02-160 Hz, que comprende a la banda registrada por el Holter.

El sistema de adquisición es el descrito en 3.2.2.3 con una frecuencia de muestreo equivalente de 250 Hz. Las derivaciones grabadas son V2 y V5. De ellas se seleccionó aquella con mejor SNR para la onda T. Debido a variaciones en la velocidad de lectura de la cinta magnética, se ha efectuado un reajuste en las unidades de la variable temporal. Ello se ha hecho de modo que los pulsos de sincronismo, que aparecen al principio de cada cinta y que se grabaron con una periodicidad de un segundo, estén separados un número de muestras equivalente a un segundo. Esto supone reconsiderar en cada caso, después de la lectura digital, la frecuencia de muestreo, variándola en torno a los 250 Hz tomados como base, hasta que la separación temporal del pulso de sincronismo es la correcta en número de muestras por el periodo de muestreo.

Dado que la onda T no es normal después del infarto, sería mejor considerar las 12 derivaciones tipo del ECG para identificar la onda T que tuviera mejor SNR y máxima duración. En este estudio, debido a las limitaciones del Holter usado, sólo se consideraran las dos derivaciones ya comentadas.

4.3.3 Medidas consideradas

Como ya se ha comentado en la introducción a este capítulo, se mide sobre el registro de ECG los siguientes intervalos QT, QTP, QT_c, QTP_c y RR. Para analizar los resultados se presenta en primer lugar el valor medio de cada intervalo QT en las 24 horas de registro de la señal (\overline{QT} , \overline{QTP} , $\overline{QT_c}$ y $\overline{QTP_c}$). Otro modo en que se analizan los resultados es mediante el tanto por ciento de latidos cuyo valor de QT_c está por encima de un cierto umbral. También se analiza el intervalo QT-QTP (distancia del pico de la onda T al final de ésta) para ser comparado con el QT. Por último, la HRV se analiza según la desviación tipo del intervalo RR en 24 horas, índice global SD(RR).

4.4 Análisis de resultados

Primeramente se analizan las propiedades estadísticas de la medida de una misma magnitud realizada sobre todos los elementos a considerar, para separar en grupos distintos los elementos con diferente valor de esta magnitud. Seguidamente se pasa a considerar los grupos de pacientes A, B y C con los valores de los intervalos de QT,

y en base a estos valores se intentarán separar los grupos de pacientes desde un punto de vista estadístico. Se analiza el significado fisiológico del QTP y la significación de la HRV como estratificador de PPIM.

4.4.1 Diferencias entre promedios: La prueba de la t de Student

Cuando se tienen promedios o valores medios correspondientes a la medida de una magnitud realizada sobre dos conjuntos distintos de muestras, se puede analizar la significación de esta medida del modo que se describe a continuación.

Se calcula la significación estadística (p) de la medida o magnitud para comprobar si estos dos grupos pueden separarse o diferenciarse en base a esta magnitud. El valor de p , que se obtendrá en función de las medias y las desviaciones tipo de la medida en cada grupo de elementos, es un indicador de la probabilidad de que todos los elementos (pacientes) de los dos grupos considerados pertenezcan al mismo tipo de elementos, es decir, sean realmente un mismo grupo. Una p pequeña quiere decir que efectivamente la probabilidad de que se hayan dado por azar diferencias de valores entre los elementos de los dos grupos es muy pequeña, y por tanto lo más probable es que efectivamente sean elementos con comportamiento intrínseco diferente respecto al parámetro considerado. Como en el caso que nos ocupa se conoce *a priori* que los pacientes han tenido una evolución posterior diferente en el grupo A que en el B, lo que nos interesa es encontrar un parámetro que al comparar A con B nos dé una p pequeña (valor del parámetro bien diferenciado en los distintos grupos). De este modo, antes de que el paciente haya desarrollado la arritmia maligna (situación en la que se grabaron los registros) se podría, sin más que determinar el valor del parámetro, predecir a qué grupo de elementos (pacientes) pertenece y por tanto tener una predicción de la evolución posterior del paciente.

Sea una medida sobre un conjunto de elementos con una distribución de probabilidad normal

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.1)$$

donde μ es la media y σ la desviación tipo. Si se reescribe esta expresión en función

de una nueva variable $z = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$ se obtiene

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) \quad (4.2)$$

Si la medida del valor de x se realiza solamente en un conjunto de N elementos distintos, el error que se comete en la estimación de la media es

$$\varepsilon = \sigma/\sqrt{N}. \quad (4.3)$$

Este error es la desviación tipo de las medias que se obtendrían si se repitieran las N medidas de forma repetitiva sobre conjuntos distintos de N elementos del mismo grupo.

Si ahora se tienen dos conjuntos de medidas x_1 y x_2 sobre grupos diferentes de elementos, con los valores medios de éstas μ_1 y μ_2 , desviación tipo σ_1 y σ_2 , y si el número de medidas en cada conjunto es N_1 y N_2 , respectivamente, se puede calcular

$$q = \mu_1 - \mu_2 \quad (4.4)$$

y el error en la estimación de q será

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}} \quad (4.5)$$

Para determinar la probabilidad p de que el valor obtenido de q sea distinto de cero, supuesto q real cero (los dos grupos de elementos iguales), se procede del siguiente modo. Se tiene un error ε , (4.5) que es la desviación tipo de medir q repetidas veces por el procedimiento expuesto, y se sabe que el valor real de q es cero, por tanto se puede escribir la función de distribución de q , asumiendo que su desviación tipo es ε , su valor medio es cero, su distribución normal y definiendo

$$t = \frac{q - 0}{\varepsilon} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}}, \quad (4.6)$$

así de 4.2 se puede escribir

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right), \quad (4.7)$$

donde $p(t)$ es la probabilidad de que, teniendo las dos medidas x_1 y x_2 de una magnitud el mismo valor en los dos grupos de elementos, la diferencia de sus medias tenga un

valor q distinto de cero. Por tanto, es evidente que si $p(t)$ es muy pequeño lo más probable es que x_1 y x_2 sean intrínsecamente diferentes. Para calcular esta p se ha supuesto que se conoce la desviación tipo real σ_i ($i = 1, 2$) de los dos conjuntos de medidas, lo que no sucede en la realidad, y sólo se cuenta con una estimación a partir de los N_i ($i = 1, 2$) datos medidos. Esta estimación será tanto, peor cuanto menor sean los números N_i . En este caso, la distribución $p(t)$ difiere de la distribución normal y sigue una curva distinta llamada distribución t de Student. Esta suele aplicarse cuando el número total de muestras medidas entre los dos conjuntos es menor de 30. Para calcular la $p(t)$ es necesario conocer los valores estimados de las medias y las desviaciones tipo a partir de los N datos y calcular la t sustituyendo en 4.6, para luego buscar en las tablas de la prueba t de Student el valor de p que le corresponde (Breadford, 1977)

En nuestro caso, x será el valor de \overline{QT}_c o de los demás índices considerados. La p así calculada indicará si estos pacientes tienen diferente valor de \overline{QT}_c u otro índice por azar (p grande) o porque realmente es diferente (p pequeña). En este último caso podrá usarse el índice que corresponda como indicador de pertenencia de un paciente a un grupo u otro.

4.4.2 Los intervalos QT_c y QTP_c

En la figura 4.2 se presentan los resultados obtenidos tras la medición del intervalo QT en cada paciente de los considerados en cada uno de los tres grupos. Se muestra el porcentaje de latidos cuyo valor de QT está comprendido entre ciertos valores. Estos valores límite se consideran a intervalos de tiempo incrementales de 20 ms. De este modo se cubren los valores de QT entre 200 y 560 ms, que abarcan todas los posibles valores del intervalo QT. A modo de ejemplo, si se tiene el 20% de latidos entre 300 y 320 (se representa por el punto intermedio 310), esto quiere decir que el 20% de los latidos medidos presentan un valor del intervalo QT mayor que 300 ms y menor que 320 ms. Superpuesto en la gráfica, se presenta el valor medio en todo el registro del intervalo QT (\overline{QT}) y la desviación tipo (SD) de esta medida para cada paciente.

Las figuras 4.3, 4.4 y 4.5 muestran los valores de QTP , QT_c y QTP_c , respectivamente. La figura 4.6 muestra de forma análoga el valor del intervalo RR en los pacientes considerados.

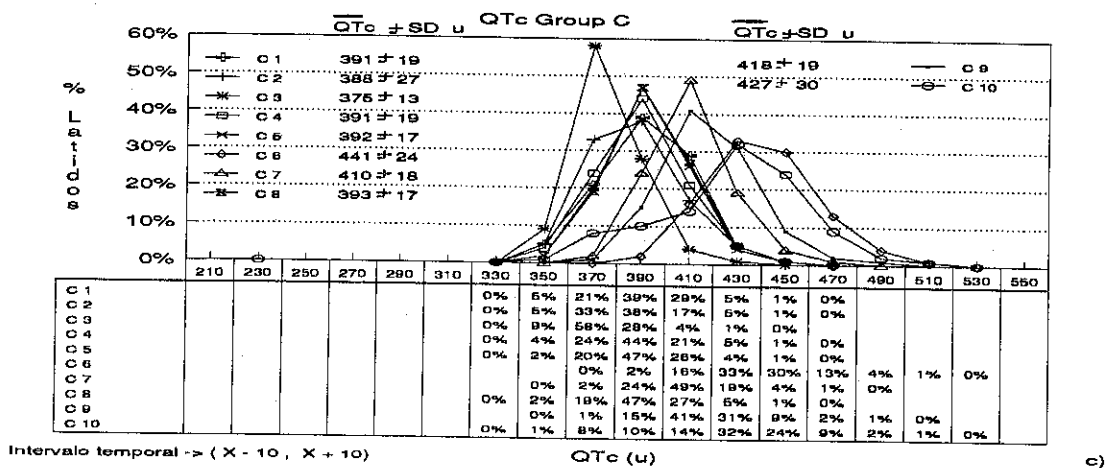
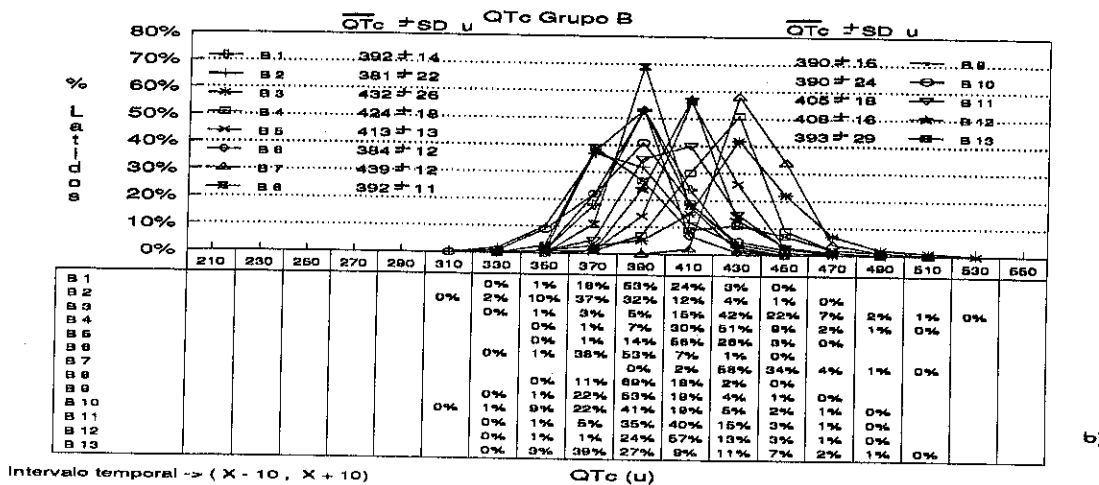
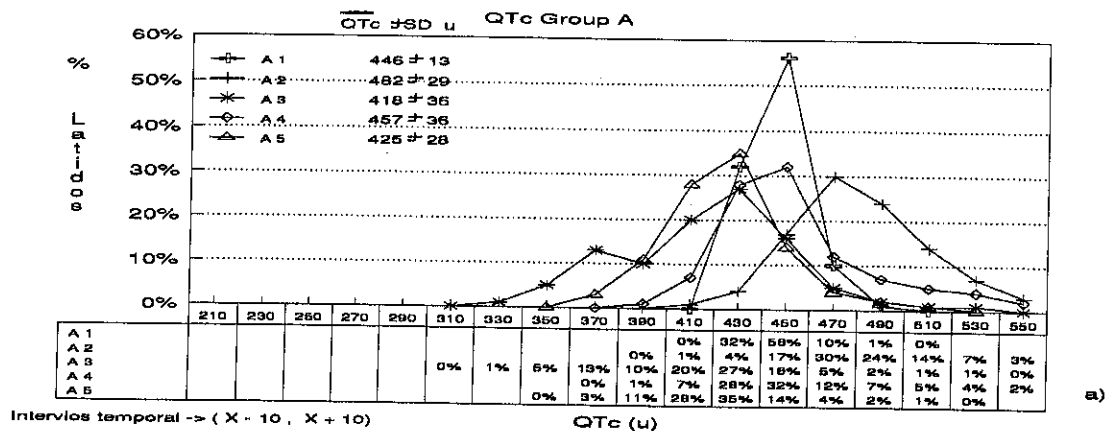


Figura 4.4: Valores del QT_c en los tres grupos de pacientes. La notación es la misma que se utiliza en la figura 4.2.

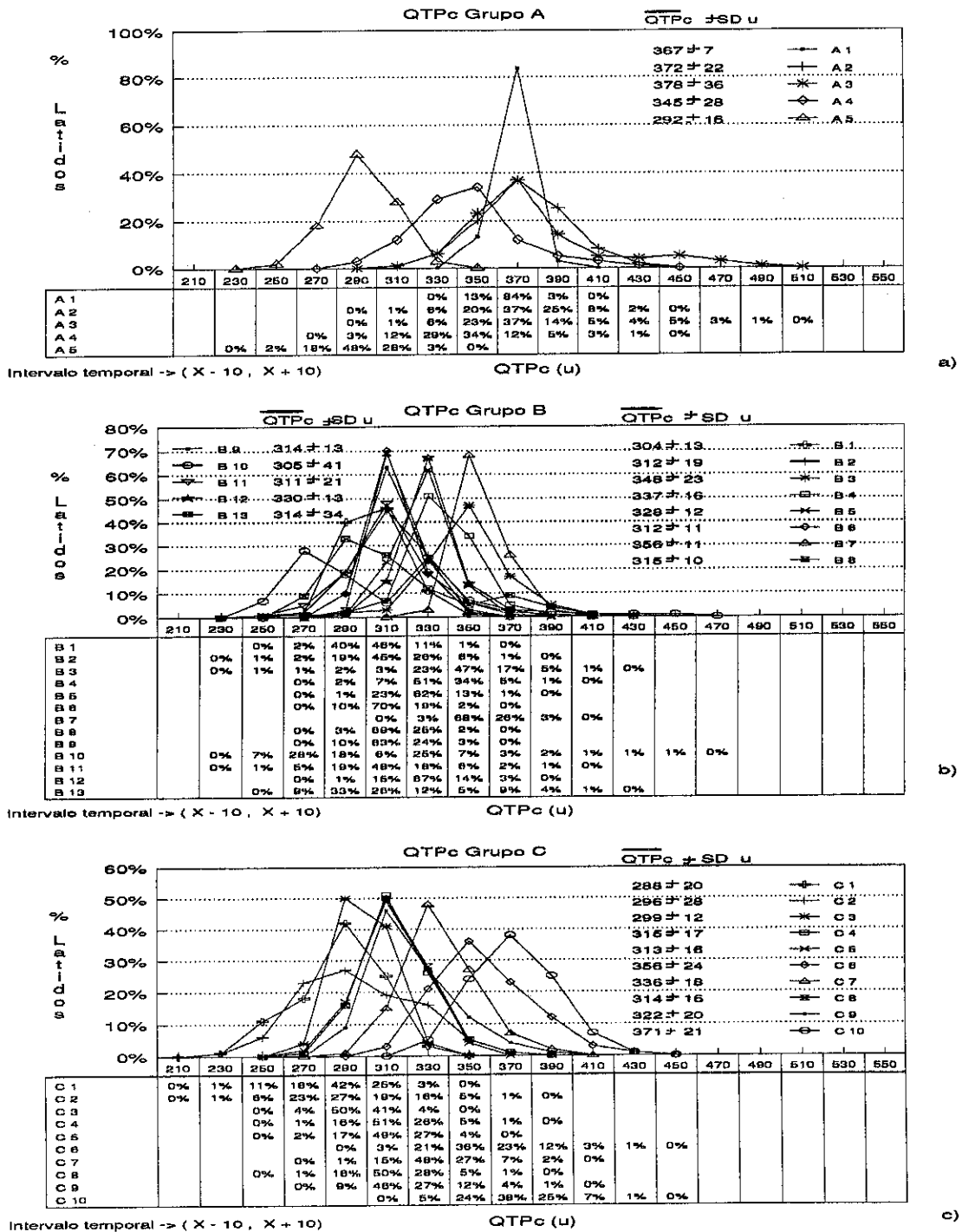
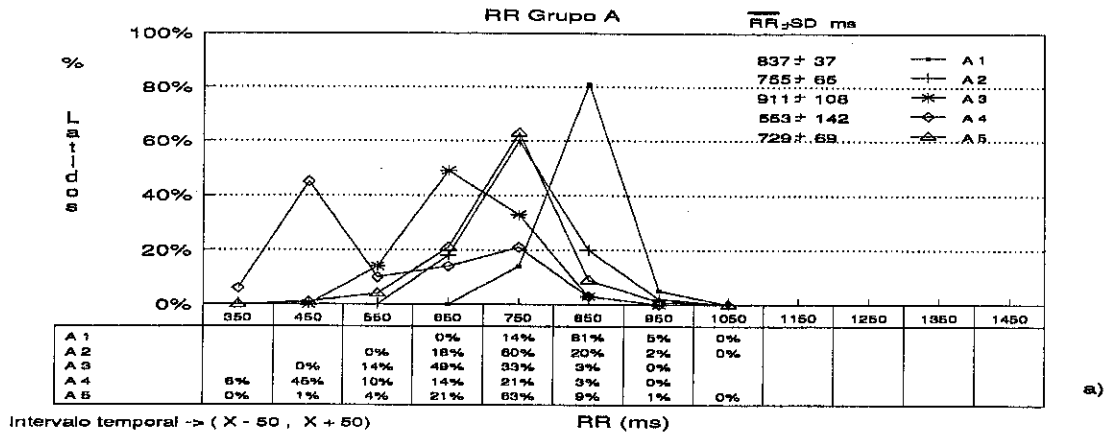
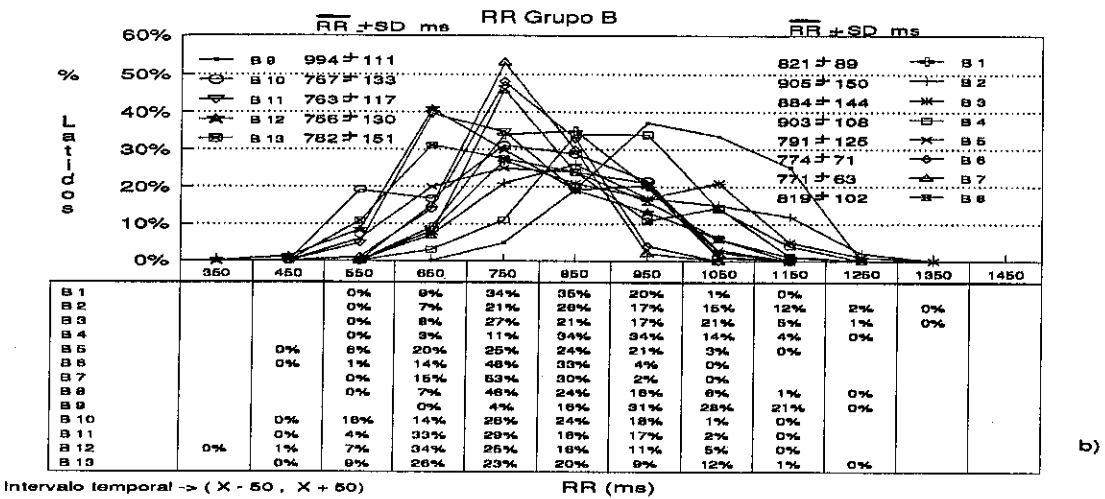


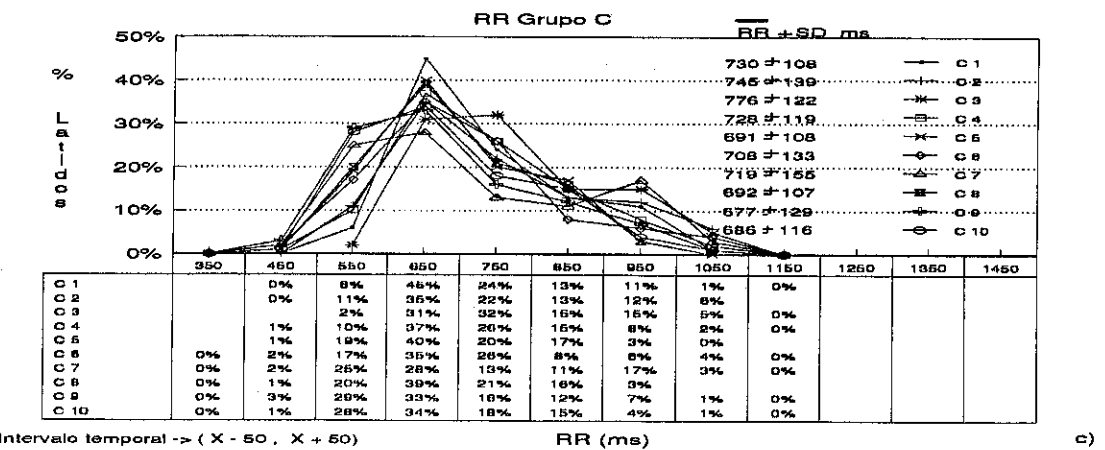
Figura 4.5: Valores del QTPc en los tres grupos de pacientes. La notación es la misma que se utiliza en la figura 4.2.



a)



b)



c)

Figura 4.6: Valores del intervalo RR en los tres grupos de pacientes. La notación es la misma que se utiliza en la figura 4.2, pero los incrementos de tiempo se hacen de 100 en 100 ms.

Las mediciones de los intervalos corregidos con la fórmula de Bazett están expresados en u ($u=ms/\sqrt{s}$). Nótese cómo la corrección de los intervalos (QT_c , QTP_c), disminuye la SD en los grupos B y C. Esto es debido al hecho de corregir la dependencia del QT y QTP con el intervalo RR, y por tanto tener un valor más estable con el tiempo. Este efecto no se da en el grupo A, ya que en estos pacientes el intervalo RR permanece más estable (el valor medio de la desviación tipo del intervalo RR en todos los pacientes del grupo A es de 84 ms, tabla 4.1) y porque existen mayores variaciones intrínsecas del intervalo QT (figura 4.2).

En la tabla 4.1 se presenta el resultado de calcular el valor medio en 24 horas de cada intervalo considerado para cada paciente y después la media y la desviación tipo de este parámetro entre los pacientes de cada grupo. A este nuevo valor, que ahora debe ser asimilado con cada grupo de pacientes, se le denotará como una media doble, en el tiempo primero y en los pacientes después (\overline{QT} , $\overline{QT_c}$, \overline{QTP} y $\overline{QTP_c}$).

VALORES MEDIOS EN EL TIEMPO EN CADA GRUPO

	QT (ms)	QTP (ms)	QT _c (u)	QTP _c (u)	HRV (ms)
Grupo	$\overline{QT} \pm SD$	$\overline{QTP} \pm SD$	$\overline{QT_c} \pm SD$	$\overline{QTP_c} \pm SD$	$\overline{SD(RR)} \pm SD$
A	374 ± 33	296 ± 34	445 ± 23	350 ± 31	84 ± 37
B	365 ± 21	292 ± 19	403 ± 18	322 ± 16	115 ± 27
C	340 ± 14	272 ± 20	402 ± 20	321 ± 25	124 ± 15
p(AB)	<0.5	-	<0.005	<0.05	<0.05
p(AC)	<0.05	<0.02	<0.01	<0.1	<0.02

Tabla 4.1: Valores medios de los intervalos de QT en el tiempo y en los pacientes.

Valores medios en el tiempo y en cada grupo de pacientes de los intervalos QT, QTP, QT_c, QTP_c (\overline{QT} , $\overline{QT_c}$, \overline{QTP} y $\overline{QTP_c}$). La HRV (desviación tipo del RR en 24 horas $\overline{SD(RR)}$) se expresa como la media en cada grupo de pacientes ($\overline{SD(RR)}$). La significación estadística (p), de cada uno de los intervalos así expresados, para separar los diferentes grupos se ha calculado usando la prueba de la t de Student. Se muestran los valores p(AB) y p(AC) ya que es el grupo A (evolucionarán desfavorablemente) el que nos interesa poder separar de B y por supuesto de C.

Usando la t de Student comentada en el apartado anterior, se obtienen los valores de las dos últimas filas en la tabla 4.1, en la que se ve la significación p de cada

indicador considerado para separar al grupo A del B, y A de C. Se observa que el mejor parámetro en este sentido es $\overline{QT_c}$ ($p < 0.01$). Cuando se comparan los grupos B y C no se encuentran diferencias significativas. Los pacientes en los grupos B y C presentan una media de QT_c (403 y 402 u), por debajo de la considerada límite de normalidad (440 u). Los pacientes en el grupo A presentan una media superior (445 u).

Analizando las diferencias entre grupos del valor de $\overline{QT_c}$ ($\overline{QT_c} = \overline{QTP_c} + \overline{(QT - QTP)_c}$) se puede observar como éstas son de aproximadamente 40 u entre los grupos A y B y entre A y C (tabla 4.1). Esta diferencia puede ser asociada en parte con la fase final de la repolarización (las diferencias en $\overline{(QT - QTP)_c}$ son de aproximadamente 10 u , tabla 4.2) y en parte con la región plana (las diferencias en $\overline{QTP_c}$ son de aproximadamente 30 u , tabla 4.1). Esto significa que las variaciones del QT_c se deben a variaciones en las dos regiones de los potenciales de acción, pero mayoritariamente en la zona plana (figura 4.1). Ello explicaría el hecho que el QT_c sea más significativo que el QTP_c y que todavía éste tuviera cierto poder separador ($p < 0.05$), dado que el 75% (30 u de 40) de la variación del intervalo QT_c entre los pacientes en A y B se da en el QTP_c y sólo el 25% (10 u de 40) se da en el $(QT - QTP)_c$.

A partir de las figuras 4.2 y 4.3 y la tabla 4.2 se puede comprobar que hay pacientes en los que el valor de \overline{QT} no es exactamente igual al valor $\overline{QTP} + \overline{QT - QTP}$ (por ejemplo, A_4 y B_2). Esto se debe a que cuando se evalúa el QTP y el $QT - QTP$ es necesario rechazar más latidos que cuando la evaluación se limita al QT , dado que errores en la definición del pico de la onda T aumentan el número de rechazos respecto a la sola evaluación del final de la onda T para definir el QT .

La figura 4.7 muestra el porcentaje medio de latidos en cada grupo cuyo valor de QT_c es mayor que diferentes umbrales entre 400 y 500 u .

Se ha evaluado el nivel de significación de estos índices para separar los pacientes. Se ha observado que todos los umbrales considerados son capaces de realizarlo, pero el que presenta menor p , y por tanto mejor separación consigue, es el umbral de 440 u ($p < 0.005$), incluso mejor que el índice $\overline{QT_c}$.

En la figura 4.8 se presenta a modo de ejemplo la evolución de los distintos intervalos de QT durante el tiempo para el paciente B_5 . Se observa como la fórmula de Bazett

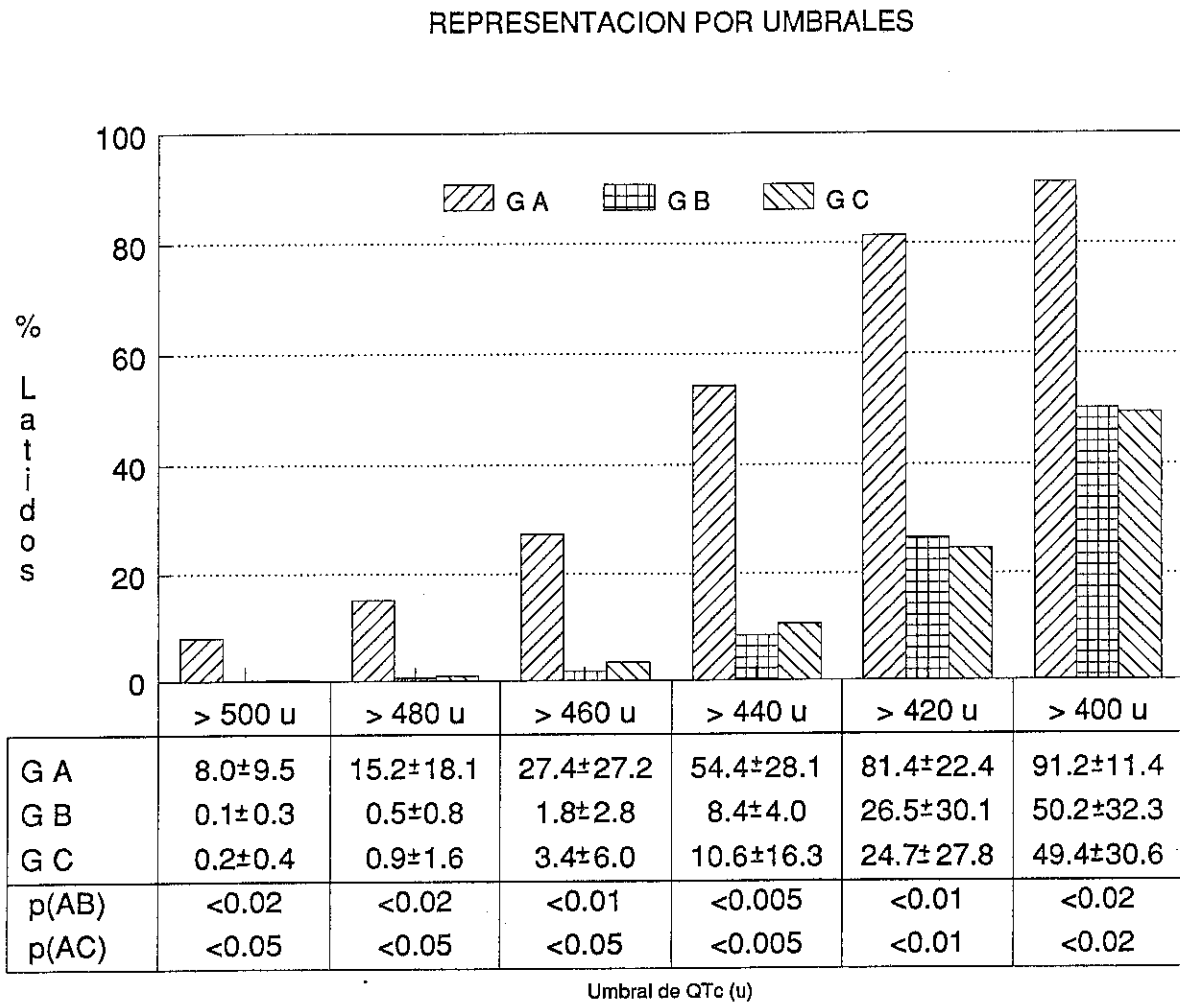


Figura 4.7: Porcentaje de latidos cuyo valor de QT_c es mayor que ciertos umbrales.

Los umbrales considerados son 500, 480, 460, 440, 420, y 400 u. Se muestran los valores numéricos con la desviación tipo para cada grupo y cada umbral. Estos valores se toman como parámetros diferenciadores y se calcula la p usando nuevamente la prueba de la t de Student para separar A de B ($p(AB)$) y A de C ($p(AC)$). Nótese como 440 u es el valor que mejor separa A de B y de C.

corrige la dependencia del QT con el intervalo RR, y aunque se han propuesto otras correcciones (Sadeh y otros, 1987), ésta modela bien la dependencia fundamental, incluso en el caso del QTP. Nótese (tabla 4.2 y figuras 4.2 y 4.6) que las distancias $(QT-QTP)$ y $(QT-QTP)_c$ permanecen constantes en el tiempo aunque el RR y el QT cambien. Este tipo de representación gráfica puede ser útil para visualizar cambios dinámicos en los intervalos.

4.4.3 El intervalo (QT-QTP)

El objetivo de esta sección es verificar si los intervalos QT y QTP contienen la misma información, desde el punto de vista de las conclusiones que pueden obtenerse a partir de ellos. Para analizar esta cuestión se estudia la relación entre los intervalos QT, QTP y $(QT-QTP)$.

En la tabla 4.2 se presentan los valores de $\overline{(QT - QTP)}$ y $\overline{(QT - QTP)_c}$ para cada paciente y la media en cada grupo.

En esta tabla se observa como las distancias $(QT-QTP)$ y $(QT-QTP)_c$ no son constantes para todos los grupos de pacientes, y no presentan una dependencia lineal con el intervalo \overline{QT} y $\overline{QT_c}$ (figuras 4.2, 4.4 y tabla 4.1). Los grupos B y C tienen valores similares de $\overline{(QT - QTP)}$, (74 ± 6 ms y 70 ± 8 ms, respectivamente). Estos valores podrían ser considerados como una constante, pero distinta de la del grupo A (82 ± 18 ms). Análogamente ocurre con los valores corregidos.

De estas consideraciones se deduce que, aunque el intervalo QTP es más fácil de definir y detectar, éste pierde información sobre el tiempo de repolarización (QT), que no puede ser deducida a partir del valor de QTP. Por ello, este intervalo no será el parámetro idóneo para estudiar patologías asociadas con el tiempo total de repolarización.

La SD del $(QT-QTP)$ en cada paciente tiene valores comparables con la precisión del algoritmo (capítulo 3). Ello significa que el valor $(QT-QTP)$ permanece aproximadamente constante con el tiempo en cada paciente. Sin embargo hay pacientes en los que el valor de $(QT-QTP)$ tiene una desviación tipo superior ($A_2, A_3, A_4, A_5, B_2, B_{10}, B_{11}, C_2$ y C_{10}). Esto ocurre cuando la onda T no tiene un pico, máximo o

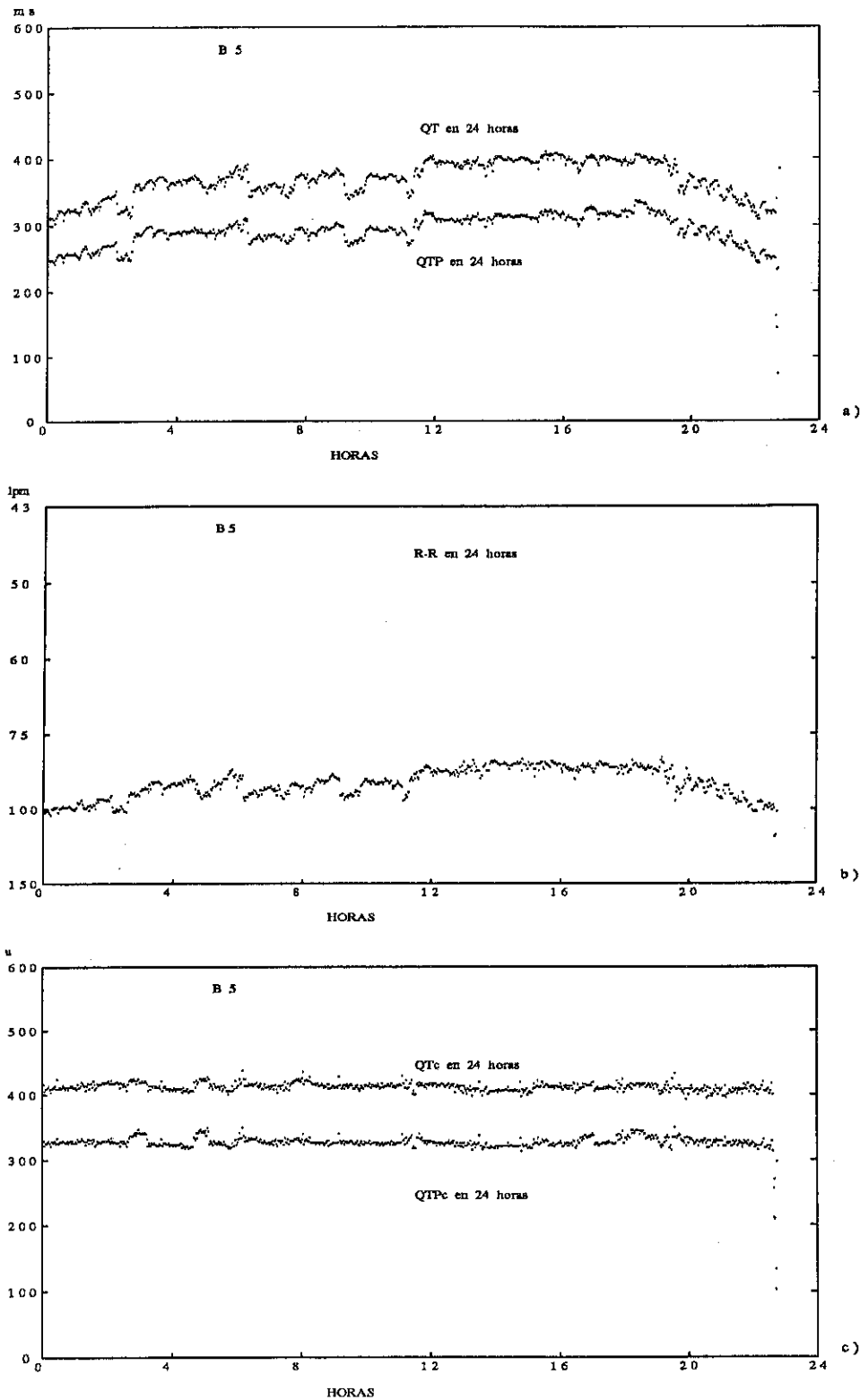


Figura 4.8: Evolución dinámica de los intervalos de QT

Comportamiento dinámico del QT en el paciente B₅. a) Evolución del QT y QTP, b) evolución del intervalo RR expresado en latidos por minuto (lpm), c) evolución del QT_c y QTP_c. Cada punto es el promedio de valores en 36.4 s. Nótese como la dependencia fundamental del QT con el RR está bien modelada con esta corrección.

PROMEDIO DE (QT-QTP)						
Grupo	PROMEDIO EN CADA PACIENTE				PROMEDIO EN CADA GRUPO	
	$\overline{QT-QTP} \pm SD$		$\overline{(QT-QTP)}_c \pm SD$		$\overline{(QT-QTP)} \pm SD$	$\overline{(QT-QTP)}_c \pm SD$
A	A ₁	72 ± 12	A ₁	75 ± 13	82 ± 18	90 ± 19
	A ₂	95 ± 32	A ₂	102 ± 35		
	A ₃	57 ± 23	A ₃	63 ± 27		
	A ₄	80 ± 21	A ₄	93 ± 32		
	A ₅	109 ± 25	A ₅	118 ± 30		
B	B ₁	79 ± 9	B ₁	83 ± 11	74 ± 6	78 ± 6
	B ₂	68 ± 18	B ₂	70 ± 20		
	B ₃	81 ± 11	B ₃	84 ± 13		
	B ₄	82 ± 12	B ₄	84 ± 12		
	B ₅	75 ± 9	B ₅	80 ± 10		
	B ₆	62 ± 6	B ₆	67 ± 8		
	B ₇	73 ± 9	B ₇	78 ± 11		
	B ₈	69 ± 7	B ₈	73 ± 8		
	B ₉	77 ± 9	B ₉	77 ± 9		
	B ₁₀	77 ± 20	B ₁₀	82 ± 23		
	B ₁₁	81 ± 19	B ₁₁	86 ± 22		
	B ₁₂	67 ± 10	B ₁₂	72 ± 12		
	B ₁₃	72 ± 15	B ₁₃	75 ± 16		
C	C ₁	89 ± 15	C ₁	97 ± 20	70 ± 8	77 ± 9
	C ₂	78 ± 24	C ₂	84 ± 26		
	C ₃	67 ± 8	C ₃	77 ± 11		
	C ₄	64 ± 7	C ₄	70 ± 11		
	C ₅	66 ± 10	C ₅	72 ± 14		
	C ₆	70 ± 17	C ₆	77 ± 19		
	C ₇	63 ± 13	C ₇	69 ± 16		
	C ₈	66 ± 10	C ₈	72 ± 14		
	C ₉	78 ± 17	C ₉	86 ± 20		
	C ₁₀	61 ± 20	C ₁₀	66 ± 22		

Tabla 4.2: Valores medios de los intervalos (QT-QTP) en el tiempo y en los pacientes.

Valores medios en el tiempo y en cada grupo de pacientes de los intervalos (QT-QTP) y (QT-QTP)_c ($\overline{(QT-QTP)}$, $\overline{(QT-QTP)}_c$, $\overline{(QT-QTP)}$ y $\overline{(QT-QTP)}_c$). Las unidades son para los intervalos temporales ms y para los intervalos corregidos u. En la parte derecha se presentan los valores medios en cada grupo. Este valor es diferente en el grupo A al valor en el B o en el C. Por otra parte el valor (QT-QTP) permanece constante en cada paciente con la precisión del algoritmo (14.3 ms) y las excepciones comentadas en el texto.

mínimo, bien definido. En estos casos (algunos indicados en la figura 4.9), el cruce por cero de la señal derivada (pico de la onda T) tiene una gran variabilidad, lo que origina una gran imprecisión en su determinación.

En pacientes con una clara definición del QTP, se puede expresar el QT como el valor del QTP más una constante k :

$$QT_i = QTP_i + k, \quad (4.8)$$

donde el valor de i denota cada latido y k es una constante que depende de cada paciente $k = \overline{QT} - \overline{QTP}$. La estimación de k puede realizarse en una zona de la señal previamente seleccionada, de modo que esté libre de ruido y permita realizar con precisión la medida del QTP y QT. En estos casos se puede usar el pico de la onda T en lugar del final para medir el valor del intervalo QT, con la ventaja de tener mayor precisión en la medida.

4.4.4 Variabilidad del ritmo cardiaco

A partir de las posiciones de la onda R detectadas por el algoritmo de medida del QT, se ha calculado el índice global de HRV SD(RR). En la última columna de la tabla 4.1 se presenta este índice promediado en cada grupo con la correspondiente desviación tipo. Si se usa dicho índice para separar los grupos A y B se obtiene una $p < 0.05$. En la figura 4.6 la desviación tipo del intervalo RR es directamente el índice SD(RR) para cada paciente. HRV es menor en PPIM que desarrollan posteriormente AVM que en aquellos PPIM que no tienen esta tendencia. Estos resultados están de acuerdo con los obtenidos por Kleiger y otros (1987).

Ni el parámetros QT_c ni el de HRV son definitivos para estratificar los PPIM. Tomando una combinación de ambos índices, y suponiendo que la distribución de los valores de $\overline{QT_c}$ y HRV alrededor de su valor medio fueran independientes, se podría mejorar el valor predictivo de estos índices. Con la suposición de independencia de QT_c y HRV el valor de p para los dos índices juntos es el producto de cada p_i correspondiente a cada índice. Considerando $\overline{QT_c}$ y HRV para separar A de B se obtendría $p < 0.005 \cdot 0.05 = 0.00025$ y análogamente para separar A y C, y usando los índices de umbral de QT_c en combinación con el de HRV.

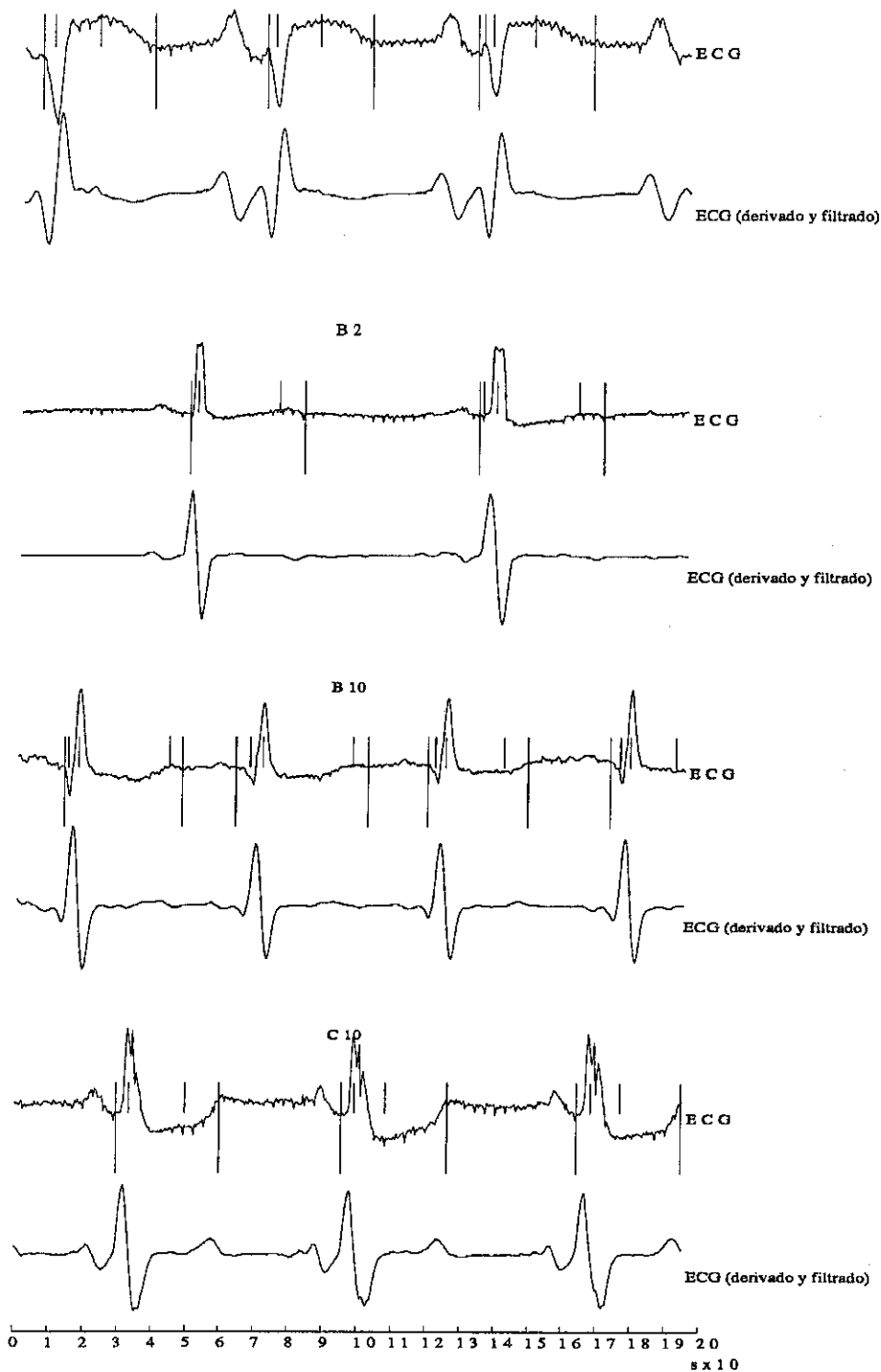


Figura 4.9: Definición imprecisa del pico de la onda T.

Patrones de cuatro señales ECG y la correspondiente señal derivada y filtrada paso bajo. Estas corresponden a los pacientes (A_3 , B_2 , B_{10} y C_{10}). En estas señales ECG la onda T no tiene un máximo o mínimo que permita una correcta definición del pico de la onda T. Las líneas largas muestran el inicio de la onda Q y fin de la onda T (intervalo QT). Las líneas cortas muestran las posiciones de las ondas Q, R y pico de la T, en este orden. Nótese como en la derivada el pico de la onda T es una línea horizontal que da una gran dispersión de unos latidos a otros al marcar el cruce exacto por cero.

4.5 Discusión y conclusiones

Los resultados del análisis presentado en este capítulo se pueden resumir en los siguientes puntos:

- El intervalo QT_c permite diferenciar PPIM que tienen tendencia a desarrollar AVM de aquellos otros PPIM que no tienen esta tendencia. $\overline{QT_c}$ y el porcentaje de latidos cuyo valor de QT_c es mayor que 440μ se han mostrado los mejores índices para estratificar los PPIM, de acuerdo al criterio anteriormente expuesto. El valor del $\overline{QT_c}$ debe ser considerado como una tendencia no definitiva para clasificar pacientes según su riesgo de muerte súbita.
- El intervalo QTP pierde información sobre el tiempo total de repolarización de los ventrículos, por tanto este intervalo no puede ser considerado como un buen marcador de patologías relacionadas con este periodo de tiempo.
- En los casos donde la onda T tiene un pico bien definido, la distancia QT-QTP es una constante con la precisión del algoritmo y depende de cada paciente. En estos casos el intervalo QT puede ser medido como el correspondiente QTP más una constante k que depende del paciente y que se estima en una zona del ECG libre de ruido. Cuando el pico no está bien definido, sería necesario usar otros métodos de medida que no tomen información puntual sino de toda la onda, lo que permitiría precisar un instante asociado a la máxima ocurrencia de la onda T (Capítulo 5).
- La HRV también proporciona información sobre PPIM. Su valor es menor en PPIM con AVM que en PPIM que no presentan estas arritmias. La combinación de HRV y $\overline{QT_c}$ podría eventualmente usarse para obtener una más fiable estratificación de los PPIM.

Sobre estas conclusiones habría que puntualizar las siguientes consideraciones. Primero, el número de pacientes, principalmente en el grupo A, no es suficientemente significativo para deducir conclusiones estadísticas definitivas. Los registros de ECG pertenecientes a pacientes del grupo A son difíciles de obtener y para completar este estudio sería necesario contar con mayor número de ellos. En segundo lugar, algunos

pacientes del grupo A (A_3, A_5) tienen menor valor del $\overline{QT_c}$ que otros pacientes en el grupo B o C (B_3, B_7, C_6) (figura 4.4), es decir las funciones de distribución del $\overline{QT_c}$ en A y B o en A y C tienen un solapamiento. Esto significa que no se puede usar el $\overline{QT_c}$ como un marcador definitivo, sino como una tendencia en el sentido de mayor $\overline{QT_c}$ en PPIM con riesgo de desarrollar AVM.

El problema de la muerte súbita cardíaca es un problema multiparamétrico y no bien conocido en la actualidad, ni en cuanto a cuales son exactamente los parámetros que influyen en ella ni en qué manera lo hacen. Este estudio prueba que las prolongaciones del intervalo $\overline{QT_c}$ y el valor de HRV pueden ser considerados como parámetros relacionados con este problema y pueden ayudar a prevenir la muerte súbita cardíaca.

Capítulo 5

DETECCIÓN DE INSTANTES DE OCURRENCIA EN EL ECG

5.1 Introducción

En el capítulo 3 se presentó la forma de definir determinados puntos de interés en la señal ECG. Estos puntos son los inicios, finales y picos de determinadas ondas, y se determinaron en función de medidas locales, como son el punto de valor máximo o mínimo, los puntos de cruce por un cierto umbral, etc. Este tipo de definiciones son necesarias cuando se trata de medir intervalos como el QT que requieren los instantes límite de ciertas ondas (complejo QRS y onda T en el caso de QT). Las medidas puntuales así realizadas están sujetas a un error en su determinación, ya que el ruido presente en la señal, limita su precisión.

En otras aplicaciones interesa conocer los instantes de aparición de determinadas ondas del ECG, lo cual permite realizar otros procesados o determinar diferentes tipos de intervalos entre ocurrencias de distintas ondas. En general métodos de detección, como los detectores de QRS, reconocen la presencia o ausencia de ondas pero no dan una estimación precisa del instante de ocurrencia. Sin embargo, la precisión de esta estimación es importante en aplicaciones como la detección de la actividad del haz de His o de potenciales tardíos mediante promediado de señal (Berbari y Lazzara, 1988; Rompelman y Ross, 1986; Jané y otros, 1989b), medida de la variabilidad del ritmo

cardiaco (Kitney y Rompelman, 1980), determinación de las propiedades de conducción eléctrica del corazón (Koeleman y otros, 1983), etc. Los métodos de determinación precisa de los instantes de ocurrencia de las ondas no suelen basarse en medidas locales sino que toman la información presente en toda la onda.

En general el proceso de detección de estos instantes de ocurrencia puede separarse en dos partes:

1. Primero, reconocimiento de la onda de interés, normalmente realizado a través de un detector de QRS, y del conocimiento de la secuencia de ondas (P, QRS, T) en torno a este punto.
2. Segundo, la estimación del instante de ocurrencia de la onda (WOT)¹ propiamente dicho.

Este capítulo se centrará en la segunda parte, es decir, en la estimación precisa de los WOT en las distintas ondas del ECG. Para ello se considerará un método (Rix y Jesus, 1984) de estimación del tiempo de retardo entre señales de la misma forma, que se denominará método de integrales normalizadas en coincidencia.

Para conocer las prestaciones de un método de detección de WOT es importante analizar su comportamiento en presencia de ruido, ya que las señales reales nunca están totalmente libres de él. Una forma de cuantificarlo es mediante la desviación tipo de la distribución de WOT (σ_{wot}) obtenida en torno al punto exacto de ocurrencia. El conocimiento de σ_{wot} permite deducir las limitaciones de los procesados posteriores a la obtención del WOT.

En el caso de estimación de señales mediante promediado es bien conocido que un error en la determinación del punto de alineamiento con distribución Gaussiana y una desviación tipo de σ_{wot} produce un efecto de filtrado paso bajo a una frecuencia de corte (-3 dB) dada por la siguiente expresión (Rompelman y Ross, 1986; Jané, 1990a):

$$f_c = \frac{132.3}{\sigma_{wot}}, \quad (5.1)$$

¹En inglés "Wave occurrence time"

donde σ_{wot} se expresa en ms y f_c debe leerse en Hz. Por tanto, es evidente el interés de contar con métodos de estimación de los WOT con la menor σ_{wot} posible para que la frecuencia de corte sea lo mayor posible y poder recuperar señales de más alta frecuencia. En caso de estimar intervalos temporales entre ondas (PR, RR, PP), donde su variabilidad se usa como índice de patologías, y para el estudio de los mecanismos de control del corazón (Koeleman y otros, 1985), se necesitará que la σ_{wot} del método sea despreciable frente a las variaciones intrínsecas de estos intervalos. En caso contrario, lo que se mediría como variabilidad sería la propia inexactitud de la medida. En particular, la variabilidad intrínseca del intervalo PR está entre 0.5 y 5 ms (Koeleman y otros, 1985), lo cual exige una especial atención al determinar el WOT de la onda P y del complejo QRS. En los casos de variabilidad del RR, entre 25 y 100 ms, esta limitación es menos estricta.

Se presenta en ese capítulo el método ya comentado de estimación del tiempo de retardo, y se realiza un estudio teórico de su comportamiento en cuanto al sesgo y la desviación tipo σ_{wot} de la estimación de los WOT cuando el método trabaja con la señal (\hat{D}_s) o con la señal elevada al cuadrado (\hat{D}_{s^2}). En este segundo caso se verá como el estimador de WOT es sesgado y se propone un método para corregir el sesgo. Los resultados teóricos se han validado en simulación con señales (Gaussianas y complejos QRS reales) a las que se les ha añadido ruido blanco generado por computador. Se comprueba como las expresiones teóricas están de acuerdo con los resultados en simulación. Por último se aplica este método de estimación para la determinación de intervalos temporales latido a latido como son PP, RR, TT y PR, sobre la señal ECG real de un paciente. También se propone una técnica de estimación de la SNR de ondas recurrentes con ruido blanco aditivo a través del sesgo introducido por \hat{D}_{s^2} .

5.2 Detección de instantes de ocurrencia (WOT)

5.2.1 Conceptos básicos

El planteamiento del procesado para detección de los WOT puede realizarse desde dos puntos de vista diferentes.

Un primer enfoque es la detección de señales inmersas en ruido. El conocimiento exacto del instante de aparición permitirá realizar otro tipo de procesados. La formulación de este enfoque puede realizarse de la siguiente forma. Las señales de una determinada onda perteneciente a cada latido i pueden describirse mediante una función $x_i(t)$, definida por

$$x_i(t) = s(t - D_i) + n_i(t) \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, M \\ 0 \leq t \leq T \end{array} \right\} \quad (5.2)$$

donde $x_i(t)$ ($i=1,2, \dots, M$) es un conjunto de M realizaciones, $s(t)$ es una señal determinista, D_i es un retardo que puede ser diferente en cada realización y $n_i(t)$ es el ruido asociado a cada realización i . Se trata entonces de determinar el instante D_i en que aparece la señal en cada registro de modo que con este D_i y la referencia de tiempo absoluta, dada por el detector de presencia, en que se tomó la realización i se obtiene el instante absoluto o WOT de la señal $s(t)$ en la realización i .

En casos donde $s(t)$ es desconocido y $n(t)$ aleatorio, Gaussiano, aditivo y de media cero, pueden usarse detectores de energía (Urkowitz, 1967). Cuando $s(t)$ es conocida, la aplicación de un filtro adaptado es la que da mejores resultados.

Un segundo enfoque de la detección de WOT puede hacerse según el formalismo de estimación del tiempo de retardo. La formalización de este enfoque puede realizarse de la siguiente forma. Sean dos funciones temporales $x(t)$ e $y(t)$:

$$x(t) = s(t) + n_1(t) \quad (5.3)$$

$$y(t) = s(t - D) + n_2(t), \quad (5.4)$$

donde $s(t)$ es la componente determinista de $x(t)$ e $y(t)$, mientras que $n_1(t)$ y $n_2(t)$ son dos procesos aleatorios estacionarios no correlados y de media cero. El objetivo es encontrar el valor del retardo D . De este modo se obtiene una estimación del WOT de $y(t)$ relativo al de $x(t)$, y no respecto a una referencia temporal absoluta. Esta limitación en muchos casos no es tal, ya que los procesados posteriores suelen realizarse entre realizaciones. En promediado de señales interesa el valor del retardo de una realización respecto a otra, y en la medida de intervalos el interés también está en tiempos relativos entre realizaciones más que en absolutos. Una buena revisión de los métodos de estimación del tiempo de retardo puede encontrarse en Carter (1981).

5.2.2 Métodos de estimación de WOT en señales ECG

A continuación se hace una breve descripción de los métodos más usados en señales ECG para la estimación de los WOT (Koeleman y otros, 1984). En estos casos se conoce previamente la morfología de la señal determinista $s(t)$, y por ello los métodos que se usan son procedimientos orientados de forma específica hacia esta forma. Los más importantes son los siguientes.

1. Estimación de pico: el WOT se considera el instante de tiempo en el cual la señal que representa a la onda alcanza el máximo.
2. Simple nivel: el WOT es el punto de cruce de la señal por un determinado nivel o umbral previamente definido.
3. Doble nivel: el WOT se define como el punto medio entre las dos transiciones de la señal por un determinado nivel.
4. Filtrado adaptado: el WOT es el instante correspondiente al máximo de la señal de salida de un filtro adaptado cuya respuesta impulsional es

$$h(t) = s(-t) \quad (5.5)$$

Un requisito importante en este cuarto método es el conocimiento *a priori* de $s(t)$. Normalmente, solo se dispone de una estimación de $s(t)$, obtenida promediando distintas realizaciones con los WOT calculados por alguno de los métodos anteriores. Si la densidad espectral del ruido es constante en la banda frecuencial de la señal, entonces este método es óptimo y proporciona el mayor incremento de SNR (Lynn, 1982).

5. Método de las integrales normalizadas en coincidencia: se basa en el cálculo de la integral de la señal en el dominio de definición de ésta.

Los cuatro primeros métodos enumerados corresponden al primer planteamiento expuesto en el apartado anterior. Es decir, definen una posición absoluta y se encuadran dentro de los métodos de detección de señales inmersas en ruido. El método enumerado en último lugar, y que se estudiará en este capítulo, ha sido aplicado recientemente a la señal ECG y corresponde a los considerados métodos de estimación del tiempo de retardo.

5.3 Método de las integrales normalizadas en coincidencia

Este método de estimación del tiempo de retardo fue propuesto para la medida del retardo entre señales de la misma forma (Rix y Jesus, 1984) y se ha aplicado posteriormente a señales ECG (Jesus y Rix, 1985; Jané y otros, 1990a). Este método se ha mostrado más robusto y con mejores resultados que otros, como doble nivel o filtrado adaptado. Especialmente en casos donde la SNR es muy pequeña y cuando hay una fuerte contaminación de ruido de 50 Hz, donde el filtrado adaptado presenta pobres resultados (Jané y otros, 1990a). Esta es la razón que ha llevado a considerar un estudio más profundo del comportamiento de este método para conocer y cuantificar sus prestaciones (Laguna y otros, 1990d). Este se basa en el cálculo del retardo entre dos señales mediante la medida de la integral de la diferencia entre sus integrales normalizadas. Todo el procesado se realiza en el dominio temporal.

5.3.1 Descripción del método de estimación

5.3.1.1 Condiciones ideales

Primeramente se analiza la señal libre de ruido. Como ya se ha hecho anteriormente, se denomina $s(t)$ a la señal determinista transitoria cuya duración está incluida en el intervalo $[-a, a]$, donde el parámetro a es suficientemente grande para que se cumpla que

$$s(t) = 0 \quad t \in]-\infty, -a + D_{max}] \cup [a - D_{max}, +\infty[. \quad (5.6)$$

Ello indica que $s(t)$ sólo toma valores distintos de cero en un intervalo $[-a + D_{max}, a - D_{max}]$, siendo D_{max} el mayor retardo que puede aparecer entre dos realizaciones de la señal $s(t)$. De este modo aseguramos que para cualquier retardo $D < D_{max}$ la señal determinista $s(t - D)$ estará toda ella comprendida en el intervalo $[-a, a]$.

Se denomina $S(t)$ a la integral normalizada de $s(t)$ definida como

$$S(t) = \frac{\int_{-a}^t s(t') dt'}{S_0}, \quad \text{con } S_0 = \int_{-a}^a s(t) dt \neq 0. \quad (5.7)$$

Si $v(t)$ es otra señal de la forma $v(t) = s(t-D)$, $D < D_{max}$, cuya integral normalizada es $V(t)$, el retardo D entre las dos señales $s(t)$ y $v(t)$ puede calcularse de la forma

$$D = \int_{-a}^a (S(t) - V(t)) dt. \quad (5.8)$$

Esta relación define el método de estimación del tiempo de retardo entre las dos señales $s(t)$ y $v(t)$. Para comprobar que efectivamente esta estimación de D es correcta y para posteriores desarrollos se usarán las siguientes definiciones y propiedades que pueden demostrarse de forma inmediata.

1. Si $s(t)$ cumple la condición 5.6 entonces

$$S_0 = \int_{-a}^a s(t) dt = \int_{-a}^a s(t-D) dt \quad (5.9)$$

2. Si $f(t)$ es una función integrable definida en el intervalo $[-a, a]$ se tiene que

$$\int_{-a}^a \left(\int_a^T f(t) dt \right) dT = \int_{-a}^a (a-t)f(t) dt \quad (5.10)$$

3. Para una señal $s(t)$ que cumpla 5.6 se verifica

$$\int_{-a}^a (a-t)s(t-D) dt = \int_{-a-D}^{a-D} (a-t-D)s(t) dt = \int_{-a}^a (a-t-D)s(t) dt. \quad (5.11)$$

Si expresamos 5.8 de forma explícita en función de $s(t)$ resulta

$$D = \int_{-a}^a \left(\frac{\int_{-a}^T s(t) dt}{\int_{-a}^a s(t) dt} - \frac{\int_{-a}^T s(t-D) dt}{\int_{-a}^a s(t-D) dt} \right) dT, \quad (5.12)$$

y usando 5.9 y 5.10, se puede reescribir como

$$D = \frac{\int_{-a}^a (a-t)(s(t) - s(t-D)) dt}{S_0}. \quad (5.13)$$

Si se aplica la propiedad 5.11 al segundo miembro de la integral, se puede expresar D como

$$D = \frac{\int_{-a}^a ((a-t)s(t) - (a-t-D)s(t)) dt}{S_0} \quad (5.14)$$

y operando

$$D = \frac{D \int_{-a}^a s(t) dt}{S_0} = \frac{D S_0}{S_0} = D. \quad (5.15)$$

Por tanto, se comprueba que efectivamente la definición del estimador D es correcta. Nótese que en todo momento se ha supuesto la señal libre de ruido y por tanto son

condiciones ideales. No obstante si $v(t)$ fuese igual a $K s(t-D)$, con K una constante de proporcionalidad, la ecuación 5.8 seguiría siendo válida.

Otra forma de expresar este estimador (Rix y Jesus, 1984) es según la expresión:

$$D = \frac{\int_{-a}^a t (s(t) - s(t-D)) dt}{S_0} \quad (5.16)$$

Esta expresión permite deducir que el estimador considera el instante de aparición de $s(t)$ como el centro de gravedad de la señal, suponiendo que $s(t)$ fuese una distribución de masa. Por tanto, el retardo D es la separación entre centros de gravedad.

5.3.1.2 Presencia de ruido

El estimador antes definido proporciona el valor del retardo D entre las dos señales $s(t)$ y $v(t)$. A continuación se analiza su comportamiento cuando $s(t)$ y $v(t)$ están contaminadas con ruido aditivo, es decir, $s(t)$ se convierte en $x(t) = s(t) + n_1(t)$ y $v(t)$ lo hace en $y(t) = s(t-D) + n_2(t)$, respectivamente.

Para analizar el comportamiento del estimador propuesto se considera que el ruido $n(t)$ es estacionario, ergódico, y cumple las siguientes condiciones

$$n(t) \begin{cases} \text{Gaussiano} & : E[n^2(t)] = \sigma^2, \quad E[n^4(t)] = 3\sigma^4 \\ \text{De media cero} & : E[n(t)] = 0 \\ \text{Blanco} & : E[n(t)n(t')] = 0 \quad t \neq t' \end{cases} \quad (5.17)$$

donde la notación $E[x(t)]$ denota el valor esperado del proceso aleatorio $x(t)$, definido como

$$E[x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (5.18)$$

Además se supone el ruido no correlado entre distintas realizaciones de $s(t)$, es decir,

$$E[n_1(t) n_2(t')] = 0 \quad \forall t, t'. \quad (5.19)$$

Estas hipótesis puede considerarse que se cumplen en la señal ECG estacionaria si no existen una fuerte contribución de 50 Hz.

Cuando se plantea el análisis del comportamiento del estimador en presencia de ruido, se pueden considerar las dos opciones siguientes:

1. La estimación de D se realiza según 5.8, utilizando el valor de $s(t)$, o $s(t) + n(t)$ cuando la señal está contaminada con ruido. A este estimador se le denominará \hat{D}_s .
2. La estimación de D se realiza según 5.8, pero en lugar de $s(t)$ se usa su valor al cuadrado $s^2(t)$. Todo el desarrollo del estimador puede hacerse de forma análoga y se tendría

$$D = \frac{\int_{-a}^a \int_{-a}^T (s^2(t) - s^2(t-D)) dt dT}{\int_{-a}^a s^2(t) dt}. \quad (5.20)$$

Cuando la señal $s(t)$ tiene ruido aditivo se sustituirá $s^2(t)$ por $(s(t) + n(t))^2$ y al estimador resultante se le denominará \hat{D}_{s^2} .

La razón de considerar \hat{D}_{s^2} es debido al hecho de que si la SNR en la señal es superior a 0 dB, entonces al elevar al cuadrado la señal, la nueva SNR será mayor y por tanto cabe esperar un mejor comportamiento de este estimador \hat{D}_{s^2} frente al presentado por \hat{D}_s .

Cuando la señal está muestreada, la integral se convierte en un sumatorio a lo largo de todas las muestras, y los dt se convierten en el periodo de muestreo T_0 . En adelante se mantendrá el formalismo de integración, pero sin perder de vista que en la práctica se realiza como una suma discreta. Esto lleva a considerar el valor de dt como T_0 cuando las integrales quedan reducidas al valor de la función en un punto.

A continuación se analiza el comportamiento de estos dos estimadores \hat{D}_s y \hat{D}_{s^2} cuando el ruido cumple las condiciones descritas previamente. Para ello se calcula el valor esperado y la desviación tipo de la estimación del WOT mediante los dos estimadores propuestos.

Todo el desarrollo posterior se realiza suponiendo $v(t) = s(t - D)$ y $E[n_1^2(t)] = E[n_2^2(t)] = \sigma^2$. Las expresiones que se obtendrán serán igualmente válidas si existe un factor de proporcionalidad k en la señal y en el ruido, de modo que $v(t) = k s(t - D)$ y $E[n_2^2(t)] = k^2 \sigma^2$. Por simplicidad el desarrollo se realiza para $k = 1$.

5.3.2 Estimador \hat{D}_s

En este apartado se estudia el comportamiento de \hat{D}_s . Para ello, y sustituyendo en 5.12 $s(t)$ por $s(t) + n_1(t)$ y $v(t)$ por $s(t-D) + n_2(t)$, el estimador se expresa de la siguiente forma

$$\hat{D}_s = \frac{\int_{-a}^a \int_{-a}^T (s(t) + n_1(t)) dt dT}{\int_{-a}^a (s(t) + n_1(t)) dt} - \frac{\int_{-a}^a \int_{-a}^T (s(t-D) + n_2(t)) dt dT}{\int_{-a}^a (s(t-D) + n_2(t)) dt} \quad (5.21)$$

En una primera aproximación y con las condiciones impuestas al ruido, se puede suponer que

$$\int_{-a}^a n_i(t) dt = 0 \quad i = 1, 2, \quad (5.22)$$

$$\int_{-a}^a \int_{-a}^T n_i(t) dt dT = 0 \quad i = 1, 2. \quad (5.23)$$

De acuerdo con ella, el estimador \hat{D}_s puede reescribirse como:

$$\hat{D}_s = \frac{\int_{-a}^a \int_{-a}^T (s(t) - s(t-D)) dt dT}{S_0} = D. \quad (5.24)$$

Es decir, es un estimador exacto de D , lo no ocurre en la realidad. Para tener una primera estimación del comportamiento de \hat{D}_s en función del ruido, se considera que

$$\int_{-a}^a n_i(t) dt = \varepsilon_i \neq 0, \quad (5.25)$$

donde ε es una cantidad pequeña comparada con $\int_{-a}^a s(t) dt$, $\varepsilon_i \ll S_0$. Entonces \hat{D}_s puede reescribirse como:

$$\hat{D}_s = \frac{\int_{-a}^a \int_{-a}^T (s(t) + n_1(t)) dt dT}{S_0 + \varepsilon_1} - \frac{\int_{-a}^a \int_{-a}^T (s(t-D) + n_2(t)) dt dT}{S_0 + \varepsilon_2}. \quad (5.26)$$

Desarrollando el denominador en series de Taylor, y teniendo en cuenta que $\varepsilon_i \ll S_0$ y por tanto $\frac{\varepsilon_i}{S_0} \ll 1$, se puede escribir:

$$\frac{1}{S_0 + \varepsilon_i} = \frac{1}{S_0} \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_i}{S_0}} \simeq \frac{1}{S_0} \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{S_0} + \frac{\varepsilon_i^2}{S_0^2} \right) \quad (5.27)$$

El desarrollo incluye los términos en ε^2 , ya que al calcular el $E[\hat{D}_s]$ para distintas realizaciones del ruido los términos en ε se anularán. Si el ruido verifica las propiedades

expresadas en 5.17, se cumplen las siguientes relaciones:

$$E[\varepsilon_i] = E\left[\int_{-a}^a n_i(t) dt\right] = \int_{-a}^a E[n_i(t)] dt = 0 \quad (5.28)$$

$$E[\varepsilon_i \varepsilon_j] = \int_{-a}^a \int_{-a}^a E[n_i(t) n_j(t')] dt dt' = \begin{cases} \sigma^2 L T_0 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (5.29)$$

$$E[\varepsilon_i n_j(t)] = \int_{-a}^a E[n_i(t') n_j(t)] dt' = \begin{cases} \sigma^2 T_0 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (5.30)$$

$$E[\varepsilon_i^2 n_j(t)] = \int_{-a}^a \int_{-a}^a E[n_i(t') n_i(t'') n_j(t)] dt' dt'' = 0 \quad \forall i, j \quad (5.31)$$

donde T_0 es el periodo de muestreo y L es la longitud del intervalo $[-a, a]$, por tanto: $a = \frac{L}{2}$. Nótese que, aunque todo el formalismo se desarrolla suponiendo a las señales continuas, al realizar los cálculos se considera que las señales están muestreadas y, por tanto, los dt se convierten en el periodo de muestreo T_0 y la integral se convierte en la suma a todas las muestras del intervalo $[-a, a]$.

Desarrollando 5.26 y despreciando los terminos de orden superior a ε_i^2 se obtiene

$$\hat{D}_s = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 \quad (5.32)$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{S_0} \int_{-a}^a \int_{-a}^T (s(t) - s(t-D)) dt dT \\ A_2 &= \frac{1}{S_0} \int_{-a}^a \int_{-a}^T (n_1(t) - n_2(t)) dt dT \\ A_3 &= -\frac{1}{S_0^2} \int_{-a}^a \int_{-a}^T (s(t)\varepsilon_1 - s(t-D)\varepsilon_2) dt dT \\ A_4 &= -\frac{1}{S_0^2} \int_{-a}^a \int_{-a}^T (n_1(t)\varepsilon_1 - n_2(t)\varepsilon_2) dt dT \\ A_5 &= \frac{1}{S_0^3} \int_{-a}^a \int_{-a}^T (s(t)\varepsilon_1^2 - s(t-D)\varepsilon_2^2) dt dT \\ A_6 &= \frac{1}{S_0^3} \int_{-a}^a \int_{-a}^T (n_1(t)\varepsilon_1^2 - n_2(t)\varepsilon_2^2) dt dT \end{aligned} \quad (5.33)$$

5.3.2.1 Media de \hat{D}_s

La expresión de \hat{D}_s permite calcular el retardo D entre un par de realizaciones (1 y 2). Lo que realmente interesa es el comportamiento estadístico, y para ello se estudia

la media y la desviación tipo de \hat{D}_s , suponiendo que se calcula para distintas parejas $s(t) + n_1(t)$ y $s(t-D) + n_2(t)$, donde $s(t)$ es la misma y las realizaciones $n_{1j}(t)$ y $n_{2j}(t)$ varían en cada pareja (j) de forma no correlada. El parámetro ε_i no depende del tiempo en cada realización pero sí de la realización j , por lo que tiene sentido determinar $E[\varepsilon_i]$, $i = 1, 2$.

Calculando $E[\hat{D}_s]$ se obtiene

$$E[\hat{D}_s] = E[A_1] + E[A_2] + E[A_3] + E[A_4] + E[A_5] + E[A_6]. \quad (5.34)$$

Resolviendo término a término por separado, usando las propiedades del ruido y de los valores esperados de ε_i , queda

$$E[A_1] = \frac{1}{S_0} \int_{-a}^a \int_{-a}^T (s(t) - s(t-D)) dt dT = D \quad (5.35)$$

$$E[A_2] = \frac{1}{S_0} \int_{-a}^a \int_{-a}^T E[n_1(t) - n_2(t)] dt dT = 0 \quad (5.36)$$

$$E[A_3] = -\frac{1}{S_0^2} \int_{-a}^a \int_{-a}^T (s(t)E[\varepsilon_1] - s(t-D)E[\varepsilon_2]) dt dT = 0 \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} E[A_4] &= -\frac{1}{S_0^2} \int_{-a}^a \int_{-a}^T E[n_1(t)\varepsilon_1 - n_2(t)\varepsilon_2] dt dT \\ &= -\frac{1}{S_0^2} \int_{-a}^a (a-t) (\sigma^2 T_0 - \sigma^2 T_0) dt = 0 \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} E[A_5] &= \frac{1}{S_0^3} \int_{-a}^a \int_{-a}^T (s(t)E[\varepsilon_1^2] - s(t-D)E[\varepsilon_2^2]) dt dT \\ &= \frac{\sigma^2 L T_0 \int_{-a}^a \int_{-a}^T (s(t) - s(t-D)) dt dT}{S_0^2 S_0} \\ &= \frac{\sigma^2 L D T_0}{S_0^2} \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$E[A_6] = \frac{1}{S_0^3} \int_{-a}^a \int_{-a}^T E[n_1(t)\varepsilon_1^2 - n_2(t)\varepsilon_2^2] dt dT = 0 \quad (5.40)$$

El último término $E[A_6]$ es cero en este caso, ya que se restan dos términos idénticos; no obstante, y en cualquier caso se despreciará, ya que $\int_{-a}^a (a-t)n_i(t) dt$ es un término

del orden de ε_i (ver definición de ε_i) y por tanto quedan términos globales de orden ε_i^3 . Este es un orden mayor al que se ha considerado en esta aproximación y que en cualquier caso resulta en términos del tipo $E[n_i(t) n_j(t') n_k(t'')] = 0 \forall i, j, k, t, t', t''$.

Sumando ahora todos los términos se obtiene

$$E[\hat{D}_s] = E[A_1] + E[A_5] = D \left(1 + \frac{T_0 \sigma^2 L}{S_0^2} \right). \quad (5.41)$$

Si se define la SNR en la señal como

$$SNR_s = \left(\frac{\int_{-a}^a s(t) dt}{L\sigma} \right)^2 = \frac{S_0^2}{L^2 \sigma^2} \quad (5.42)$$

se puede escribir

$$E[\hat{D}_s] = D \left(1 + \frac{T_0}{L SNR_s} \right) \quad (5.43)$$

Se comprueba que el $E[\hat{D}_s]$ no es exactamente D, como ocurría en el caso de tomar $\varepsilon_i = 0$, pero la corrección respecto a D depende directamente del periodo de muestreo T_0 e inversamente de la longitud del intervalo considerado L ($\frac{L}{T_0}$ = número de muestras en la señal) Esto es lógico, ya que a menor T_0 y mayor L mejor se cumple que $\varepsilon_i = \int_{-a}^a n_i(t) dt$ tiende al valor medio del ruido, es decir a cero. Por tanto, a efectos prácticos \hat{D}_s puede considerarse no sesgado, ya que el cociente $\frac{T_0}{L SNR_s}$ suele ser del orden de centésimas frente a la unidad con que se compara (5.43). Por otra parte, cuanto mejor es la SNR en la señal menor es este sesgo del estimador, como era previsible. La validez de esta expresión, y posteriores que se deriven, se comprobará en el apartado de simulación (5.3.5) con distintas señales y SNR generadas por computador.

5.3.2.2 Desviación tipo de \hat{D}_s

Se ha demostrado que el estimador \hat{D}_s es prácticamente no sesgado incluso en una segunda aproximación. Sin embargo, ya se ha comentado que la bondad de un método viene dada por su sesgo y su desviación tipo. Por ello se calcula la desviación tipo de \hat{D}_s ($\sigma_{\hat{D}_s}$), dada por:

$$\sigma_{\hat{D}_s}^2 = E[\hat{D}_s^2] - (E[\hat{D}_s])^2 \quad (5.44)$$

El valor de $E[\hat{D}_s]$ ya se calculó en el apartado anterior y ahora resta obtener $E[\hat{D}_s^2]$ para conocer el valor de la desviación tipo. Usando la notación anterior y despreciando

términos que incluyen órdenes superiores a ε_1^2 , resulta

$$\begin{aligned} E[\hat{D}_s^2] &= E[A_1^2] + E[A_2^2] + E[A_3^2] + 2E[A_1 A_2] \\ &\quad + 2E[A_1 A_3] + 2E[A_1 A_4] + 2E[A_1 A_5] + 2E[A_2 A_3] \end{aligned} \quad (5.45)$$

Los demás términos no considerados incluyen componentes de orden superior a ε^2 . Si se analiza nuevamente término a término y considerando $s(t)$ simétrica, lo cual implica que

$$\int_{-a}^a t s(t) dt = 0, \quad (5.46)$$

se obtiene:

$$E[A_1^2] = E[A_1]^2 = D^2 \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} E[A_2^2] &= \frac{1}{S_0^2} \int_{-a}^a \int_{-a}^a (a-t)(a-t') E[n_1(t)n_1(t') + n_2(t)n_2(t')] dt' dt \\ &= \frac{1}{S_0^2} \int_{-a}^a (a-t)^2 (\sigma^2 + \sigma^2) dt = \frac{2T_0}{SNR_s} \left[\frac{L}{3} \right] \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} E[A_3^2] &= \frac{1}{S_0^4} \int_{-a}^a \int_{-a}^a (a-t)(a-t') (s(t)s(t')E[\varepsilon_1^2] + s(t-D)s(t'-D)E[\varepsilon_2^2]) dt' dt \\ &= \frac{\sigma^2 L T_0}{S_0^4} \left[\left(\int_{-a}^a (a-t)s(t) dt \right)^2 + \left(\int_{-a}^a (a-t-D)s(t) dt \right)^2 \right] \\ &= \frac{L\sigma^2 T_0}{S_0^2} \left[\frac{L^2}{2} + D^2 - DL \right] = \frac{T_0}{SNR_s L} \left[\frac{L^2}{2} + D^2 - DL \right] \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$2E[A_1 A_2] = 2A_1 E[A_2] = 0 \quad (5.50)$$

$$2E[A_1 A_3] = 2A_1 E[A_3] = 0 \quad (5.51)$$

$$2E[A_1 A_4] = 2A_1 E[A_4] = 0 \quad (5.52)$$

$$2E[A_1 A_5] = 2A_1 E[A_5] = 2 \frac{D^2 \sigma^2 L T_0}{S_0^2} = 2 \frac{D^2 T_0}{SNR_s L} \quad (5.53)$$

$$2E[A_2 A_3] = -\frac{2}{S_0^3} \int_{-a}^a \int_{-a}^T \int_{-a}^a \int_{-a}^{T'} E[(s(t)n_1(t')\varepsilon_1 + s(t-D)n_2(t')\varepsilon_2)] dt dt' dT dT'$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2\sigma^2 T_0}{S_0^3} \int_{-a}^a (a-t') dt' \left(\int_{-a}^a (a-t)s(t) dt + \int_{-a}^a (a-t)s(t-D) dt \right) \\
&= -\frac{2\sigma^2 T_0}{S_0^2} \left[\frac{L^3}{2} - \frac{DL^2}{2} \right] = -\frac{T_0}{SNR_s} [L - D]
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Sustituyendo ahora cada término distinto de cero resulta

$$\begin{aligned}
\sigma_{\hat{D}_s}^2 &= E[\hat{D}_s^2] - (E[\hat{D}_s])^2 \\
&= E[A_2^2] + E[A_3^2] + 2E[A_2 A_3]
\end{aligned} \tag{5.55}$$

sustituyendo se obtiene

$$\sigma_{\hat{D}_s}^2 = \frac{T_0}{SNR_s} \left[\frac{L}{6} + \frac{D^2}{L} \right]. \tag{5.56}$$

Por tanto

$$\sigma_{\hat{D}_s} = \left(\frac{T_0}{SNR_s} \left[\frac{L}{6} + \frac{D^2}{L} \right] \right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.57}$$

La desviación tipo para un periodo de muestreo T_0 fijo se incrementa conforme lo hace la longitud del intervalo $[-a, a]$ en el que está definida la señal y el retardo entre las dos señales consideradas. Sin embargo, para una longitud de intervalo L fija la desviación tipo disminuye al hacerlo T_0 y D .

5.3.3 Estimador $\hat{D}_{s,2}$

Ahora se estudiará de modo análogo el estimador $\hat{D}_{s,2}$ cuando $s(t)$ se convierte en $s(t) + n_1(t)$ y $v(t)$ en $s(t-D) + n_2(t)$. Sustituyendo en 5.20, la expresión del estimador es

$$\hat{D}_{s,2} = \frac{\int_{-a}^a \int_{-a}^T (s^2(t) + n_1^2(t) + 2s(t)n_1(t)) dt dT}{\int_{-a}^a (s^2(t) + n_1^2(t) + 2s(t)n_1(t)) dt} - \frac{\int_{-a}^a \int_{-a}^T (s^2(t-D) + n_2^2(t) + 2s(t-D)n_2(t)) dt dT}{\int_{-a}^a (s^2(t-D) + n_2^2(t) + 2s(t-D)n_2(t)) dt} \tag{5.58}$$

Si análogamente a lo realizado con \hat{D}_s , se considera en una primera aproximación que

$$\int_{-a}^a 2s(t)n_1(t) dt = \int_{-a}^a 2s(t-D)n_2(t) dt = 0. \tag{5.59}$$

$$\int_{-a}^a \int_{-a}^T 2s(t)n_1(t) dt dT = \int_{-a}^a \int_{-a}^T 2s(t-D)n_2(t) dt dT = 0. \tag{5.60}$$

$$\int_{-a}^a \int_{-a}^T (n_1^2(t) - n_2^2(t)) dt dT = 0. \tag{5.61}$$

y definiendo ahora

$$S_0 = \int_{-a}^a s^2(t) dt = \int_{-a}^a s^2(t-D) dt, \tag{5.62}$$

$$N_0 = \int_{-a}^a n_1^2(t) dt = \int_{-a}^a n_2^2(t) dt = L\sigma^2 \quad (5.63)$$

y

$$SNR_{s^2} = \frac{\int_{-a}^a s^2(t) dt}{\int_{-a}^a n^2(t) dt} = \frac{S_0}{N_0} \quad (5.64)$$

el estimador \hat{D}_{s^2} puede escribirse de 5.58 como

$$\begin{aligned} \hat{D}_{s^2} &= \frac{\int_{-a}^a \int_{-a}^T (s^2(t) + n_1^2(t)) dt dT}{S_0 + N_0} - \frac{\int_{-a}^a \int_{-a}^T (s^2(t-D) + n_2^2(t)) dt dT}{S_0 + N_0} \\ &= \frac{1}{S_0 + N_0} \left[\int_{-a}^a \int_{-a}^T (s^2(t) - s^2(t-D)) dt dT \right] \\ &= \frac{S_0}{S_0 + N_0} D \end{aligned} \quad (5.65)$$

y en función de la SNR

$$\hat{D}_{s^2} = D \frac{SNR_{s^2}}{1 + SNR_{s^2}} = D \left(1 - \frac{1}{1 + SNR_{s^2}} \right) \quad (5.66)$$

Es decir, \hat{D}_{s^2} es un estimador sesgado de D , y el sesgo (B_{s^2}) vale

$$B_{s^2} = \frac{D}{1 + SNR_{s^2}} \quad (5.67)$$

B_{s^2} es tanto mayor cuanto menor sea la SNR, es decir, si $SNR \rightarrow \infty$ entonces $\hat{D}_{s^2} \rightarrow D$ (caso ideal), y en la medida que SNR disminuye el sesgo aumenta, siendo éste proporcional al valor del retardo D . Para poder corregir este sesgo se necesitaría conocer previamente la SNR de la señal, y esto no suele ser posible *a priori*. Sin embargo se verá más adelante un procedimiento para corregir este sesgo y aprovechar el mejor comportamiento de \hat{D}_{s^2} en cuanto a desviación tipo del WOT comparado con el del \hat{D}_s . En esta primera aproximación la desviación del método sería cero y para poder tener una cuantificación de ésta, será necesario considerar un orden superior de aproximación, análogamente al caso de \hat{D}_s .

Para realizar este estudio se definen los siguientes parámetros:

$$\varepsilon_1 = \int_{-a}^a 2s(t)n_1(t) dt \neq 0 \quad , \quad \text{y} \quad \varepsilon_2 = \int_{-a}^a 2s(t-D)n_2(t) dt \neq 0 \quad (5.68)$$

donde $\varepsilon_i \ll S_0 + N_0$. Entonces el estimador \hat{D}_{s^2} se puede escribir como

$$\hat{D}_{s^2} = \frac{\int_{-a}^a \int_{-a}^T (s^2(t) + n_1^2 + 2s(t)n_1(t)) dt dT}{S_0 + N_0 + \varepsilon_1} - \frac{\int_{-a}^a \int_{-a}^T (s^2(t-D) + n_2^2 + 2s(t-D)n_2(t)) dt dT}{S_0 + N_0 + \varepsilon_2} \quad (5.69)$$

Dado que $\frac{\varepsilon_i}{S_0 + N_0} \ll 1$ se desarrollará el denominador de esta expresión hasta los términos del orden de ε_i^2 :

$$\frac{1}{S_0 + N_0 + \varepsilon_i} \simeq \frac{1}{S_0 + N_0} \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{N_0 + S_0} + \frac{\varepsilon_i^2}{(N_0 + S_0)^2} \right). \quad (5.70)$$

Y para operar con la expresión resultante se calculan previamente los siguientes valores esperados:

$$E[\varepsilon_i] = 2 \int_{-a}^a \left\{ \frac{s(t)}{s(t-D)} \right\} E[n_i(t)] dt = 0. \quad (5.71)$$

$$E[\varepsilon_i \varepsilon_j] = 4 \int_{-a}^a \int_{-a}^a \left\{ \frac{s(t)}{s(t-D)} \right\} \left\{ \frac{s(t')}{s(t'-D)} \right\} E[n_i(t) n_j(t')] dt dt' = \begin{cases} 4S_0 \sigma^2 T_0 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (5.72)$$

$$E[\varepsilon_i n_j(t)] = 2 \int_{-a}^a \left\{ \frac{s(t')}{s(t'-D)} \right\} E[n_i(t') n_j(t)] dt' = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 2\sigma^2 \left\{ \frac{s(t)}{s(t-D)} \right\} T_0 & i = j \end{cases} \quad (5.73)$$

$$E[\varepsilon_i \varepsilon_j n_k(t)] = 4 \int_{-a}^a \int_{-a}^a \left\{ \frac{s(t')}{s(t'-D)} \right\} \left\{ \frac{s(t'')}{s(t''-D)} \right\} E[n_i(t') n_j(t'') n_k(t)] dt' dt'' = 0. \quad (5.74)$$

$$E[\varepsilon_i n_j(t) n_k(t')] = 2 \int_{-a}^a \left\{ \frac{s(t'')}{s(t''-D)} \right\} E[n_i(t'') n_j(t) n_k(t')] dt'' = 0. \quad (5.75)$$

$$\begin{aligned} E[n_i^2(t) \varepsilon_j^2] &= 4 \int_{-a}^a \int_{-a}^a \left\{ \frac{s(t')}{s(t'-D)} \right\} \left\{ \frac{s(t'')}{s(t''-D)} \right\} E[n_i^2(t) n_j(t') n_j(t'')] dt' dt'' \\ &= \begin{cases} 4\sigma^4 S_0 T_0 & i \neq j \\ 4\sigma^4 S_0 T_0 + 8\sigma^4 T_0^2 \left\{ \frac{s^2(t)}{s^2(t-D)} \right\} & i = j \end{cases} \end{aligned} \quad (5.76)$$

$$E[n_i^4(t)] = 3\sigma^4 \quad (5.77)$$

Desarrollando 5.69 y despreciando los términos de orden superior a ε_i^2 se obtiene

$$\hat{D}_{s^2} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 + A_9, \quad (5.78)$$

donde ahora los A_i se definen de la siguiente forma (diferente de la usada en el apartado anterior):

$$A_1 = \frac{1}{S_0 + N_0} \int_{-a}^a \int_{-a}^T (s^2(t) - s^2(t-D)) dt dT.$$

$$A_2 = \frac{1}{S_0 + N_0} \int_{-a}^a \int_{-a}^T (n_1^2(t) - n_2^2(t)) dt dT.$$

$$A_3 = \frac{2}{S_0 + N_0} \int_{-a}^a \int_{-a}^T (s(t) n_1(t) - s(t-D) n_2(t)) dt dT.$$

$$A_4 = -\frac{1}{(S_0 + N_0)^2} \int_{-a}^a \int_{-a}^T (s^2(t) \varepsilon_1 - s^2(t-D) \varepsilon_2) dt dT.$$

$$A_5 = -\frac{1}{(S_0 + N_0)^2} \int_{-a}^a \int_{-a}^T (n_1^2(t) \varepsilon_1 - n_2^2(t) \varepsilon_2) dt dT.$$

$$\begin{aligned}
A_6 &= -\frac{2}{(S_0 + N_0)^2} \int_{-a}^a \int_{-a}^T (s(t)n_1(t)\varepsilon_1 - s(t-D)n_2(t)\varepsilon_2) dt dT. \\
A_7 &= \frac{1}{(S_0 + N_0)^3} \int_{-a}^a \int_{-a}^T (s^2(t)\varepsilon_1^2 - s^2(t-D)\varepsilon_2^2) dt dT. \\
A_8 &= \frac{1}{(S_0 + N_0)^3} \int_{-a}^a \int_{-a}^T (n_1^2(t)\varepsilon_1^2 - n_2^2(t-D)\varepsilon_2^2) dt dT. \\
A_9 &= \frac{2}{(S_0 + N_0)^3} \int_{-a}^a \int_{-a}^T (s(t)n_1(t)\varepsilon_1^2 - s(t-D)n_2(t)\varepsilon_2^2) dt dT. \quad (5.79)
\end{aligned}$$

5.3.3.1 Media de \hat{D}_{s^2}

Para conocer el comportamiento de \hat{D}_{s^2} en esta aproximación, se calcula $E[\hat{D}_{s^2}]$, lo que proporcionará el sesgo del estimador. Tomando valores esperados en 5.78 se obtiene.

$$E[\hat{D}_{s^2}] = \sum_{i=1}^9 E[A_i] \quad (5.80)$$

Calculando término a término $E[A_i]$:

$$\begin{aligned}
E[A_1] &= \frac{S_0}{S_0 + N_0} \frac{\int_{-a}^a \int_{-a}^T (s^2(t) - s^2(t-D)) dt dT}{S_0} \\
&= D \frac{S_0}{S_0 + N_0} = D \frac{SNR_{s^2}}{1 + SNR_{s^2}} \quad (5.81)
\end{aligned}$$

$$E[A_2] = \frac{1}{S_0 + N_0} \int_{-a}^a \int_{-a}^T E[n_1^2(t) - n_2^2(t)] dt dT = 0 \quad (5.82)$$

$$E[A_3] = \frac{2}{S_0 + N_0} \int_{-a}^a \int_{-a}^T (s(t)E[n_1(t)] - s(t-D)E[n_2(t)]) dt dT = 0 \quad (5.83)$$

$$E[A_4] = -\frac{1}{(S_0 + N_0)^2} \int_{-a}^a \int_{-a}^T (s^2(t)E[\varepsilon_1] - s^2(t-D)E[\varepsilon_2]) dt dT = 0 \quad (5.84)$$

$$E[A_5] = -\frac{1}{(S_0 + N_0)^2} \int_{-a}^a \int_{-a}^T (E[n_1^2(t)\varepsilon_1] - E[n_2^2(t)\varepsilon_2]) dt dT = 0 \quad (5.85)$$

$$\begin{aligned}
E[A_6] &= -\frac{2}{(S_0 + N_0)^2} \int_{-a}^a \int_{-a}^T (s(t)E[n_1(t)\varepsilon_1] - s(t-D)E[n_2(t)\varepsilon_2]) dt dT \\
&= -\frac{2}{(S_0 + N_0)^2} 2\sigma^2 T_0 \int_{-a}^a \int_{-a}^T (s^2(t) - s^2(t-D)) dt dT \\
&= -\frac{4\sigma^2 T_0 S_0}{(S_0 + N_0)^2} D = D \frac{-4T_0 SNR_{s^2}}{L(1 + SNR_{s^2})^2} \quad (5.86)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[A_7] &= \frac{1}{(S_0 + N_0)^3} \int_{-a}^a \int_{-a}^T (s^2(t)E[\varepsilon_1^2] - s^2(t-D)E[\varepsilon_2^2]) dt dT \\
&= \frac{4S_0^2 \sigma^2 T_0 D}{(S_0 + N_0)^3} = D \frac{4T_0 SNR_{s^2}^2}{L(1 + SNR_{s^2})^3} \quad (5.87)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[A_8] &= \frac{1}{(S_0 + N_0)^3} \int_{-a}^a \int_{-a}^T (E[n_1^2(t)\varepsilon_1^2] - E[n_2^2(t)\varepsilon_2^2]) dt dT \\
&= \frac{1}{(S_0 + N_0)^3} 8\sigma^4 T_0^2 \int_{-a}^a \int_{-a}^T (s^2(t) - s^2(t-D)) dt dT \\
&= \frac{8S_0\sigma^4 T_0^2 D}{(S_0 + N_0)^3} = D \frac{8T_0^2 SNR_{s^2}}{L^2(1 + SNR_{s^2})^3} \simeq 0
\end{aligned} \tag{5.88}$$

ya que el factor $\left(\frac{T_0}{L} \ll 1\right)$ es de orden superior a los demás términos

$$E[A_9] = \frac{2}{(S_0 + N_0)^3} \int_{-a}^a \int_{-a}^T (s(t)E[n_1(t)\varepsilon_1^2] - s(t-D)E[n_2(t)\varepsilon_2^2]) dt dT = 0 \tag{5.89}$$

Sumando resulta

$$\begin{aligned}
E[\hat{D}_{s^2}] &= E[A_1] + E[A_6] + E[A_7] \\
&= D \frac{SNR_{s^2}}{(1 + SNR_{s^2})} \left(1 - \frac{4T_0}{L(1 + SNR_{s^2})} + \frac{4T_0 SNR_{s^2}}{L(1 + SNR_{s^2})^2}\right) \\
&= D \frac{SNR_{s^2}}{1 + SNR_{s^2}} \left(1 - \frac{4T_0}{L(1 + SNR_{s^2})}\right)
\end{aligned} \tag{5.90}$$

El valor esperado que se obtiene es el mismo que en la primera aproximación más una corrección de orden superior. Esta corrección, análogamente a lo que ocurría con \hat{D}_s , es inversamente proporcional al número de muestras $\frac{L}{T_0}$ y a la SNR_{s^2} . En tanto L sea mayor, T_0 menor y SNR_{s^2} tienda a ∞ , la situación es la de la primera aproximación.

5.3.3.2 Desviación tipo de \hat{D}_{s^2}

Procediendo análogamente al caso de \hat{D}_s , se puede escribir

$$\sigma_{\hat{D}_{s^2}}^2 = E[\hat{D}_{s^2}^2] - E[\hat{D}_{s^2}]^2. \tag{5.91}$$

Para el cálculo de $E[\hat{D}_{s^2}^2]$ se eleva al cuadrado la expresión 5.78, despreciándose los términos de orden superior a ε^2 . Así se obtiene:

$$\begin{aligned}
E[\hat{D}_{s^2}^2] &= E[A_1^2] + E[A_2^2] + E[A_3^2] + E[A_4^2] + E[A_5^2] \\
&\quad + 2E[A_1A_2] + 2E[A_1A_3] + 2E[A_1A_4] + 2E[A_1A_5] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+2E[A_1 A_6] + 2E[A_1 A_7] + 2E[A_1 A_8] + 2E[A_2 A_3] \\
 &+2E[A_2 A_4] + 2E[A_2 A_5] + 2E[A_2 A_6] + 2E[A_2 A_7] \\
 &+2E[A_2 A_8] + 2E[A_3 A_4] + 2E[A_3 A_5] + 2E[A_4 A_5] \quad (5.92)
 \end{aligned}$$

Se analizará nuevamente término a término con las siguientes definiciones e hipótesis:

$$F = \frac{\int_{-a}^a s^2(t) t^2 dt}{S_0} \quad (5.93)$$

F es un término que aparecerá en el cálculo de los valores esperados y que depende de la forma de la señal. El cuadrado de $s(t)$ se considerará simétrico, de modo que puede escribirse

$$\int_{-a}^a s^2(t) t dt = 0. \quad (5.94)$$

Con esto se puede calcular el valor esperado de cada término, y despreciando la contribución de orden superior a T_0/L , se obtiene:

$$E[A_1^2] = (E[A_1])^2 = D^2 \left(\frac{SNR_{s^2}}{1 + SNR_{s^2}} \right)^2 \quad (5.95)$$

$$\begin{aligned}
 E[A_2^2] &= \frac{1}{(S_0 + N_0)^2} \int_{-a}^a \int_{-a}^a (a-t)(a-t') E[(n_1^2(t) - n_2^2(t)) (n_1^2(t') - n_2^2(t'))] dt dt' \\
 &= \frac{1}{(S_0 + N_0)^2} \int_{-a}^a (a-t)^2 4T_0 \sigma^4 dt = \frac{4T_0 L}{3(1 + SNR_{s^2})^2} \quad (5.96)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E[A_3^2] &= \frac{4}{(S_0 + N_0)^2} E \left[\left(\int_{-a}^a (a-t) (s(t)n_1(t) - s(t-D)n_2(t)) dt \right)^2 \right] \\
 &= \frac{4}{(S_0 + N_0)^2} \int_{-a}^a (a-t)^2 \sigma^2 T_0 (s^2(t) + s^2(t-D)) dt \\
 &= \frac{4\sigma^2 T_0}{(S_0 + N_0)^2} \left[\frac{2L^2 S_0}{4} + 2 \int_{-a}^a t^2 s^2(t) dt + D^2 S_0 - DL S_0 \right] \\
 &= \frac{4T_0 SNR_{s^2}}{(1 + SNR_{s^2})^2 L} \left[\frac{L^2}{2} + 2F + D^2 - DL \right] \quad (5.97)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E[A_4^2] &= \frac{1}{(S_0 + N_0)^4} E \left[\left(\int_{-a}^a (s^2(t)\varepsilon_1 - s^2(t-D)\varepsilon_2) dt \right)^2 \right] \\
 &= \frac{4S_0 \sigma^2 T_0}{(S_0 + N_0)^4} \left[\left(\int_{-a}^a (a-t)s^2(t) dt \right)^2 + \left(\int_{-a}^a (a-t)s^2(t-D) dt \right)^2 \right] \\
 &= \frac{4S_0 \sigma^2 T_0}{(S_0 + N_0)^4} \left[\frac{L^2}{2} S_0^2 + D^2 S_0^2 - LDS_0^2 \right] = \frac{4 SNR_{s^2}^3 T_0}{(1 + SNR_{s^2})^4 L} \left[\frac{L^2}{2} + D^2 - LD \right] \quad (5.98)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E[A_5^2] &= \frac{1}{(S_0 + N_0)^4} E \left[\left(\int_{-a}^a (a-t) (n_1^2(t)\varepsilon_1 - n_2^2(t)\varepsilon_2) dt \right)^2 \right] \\
 &\simeq \frac{8\sigma^6 S_0 T_0}{(S_0 + N_0)^4} \left(\int_{-a}^a (a-t) dt \right)^2 = \frac{2 SNR_{s^2} L T_0}{(1 + SNR_{s^2})^4} \quad (5.99)
 \end{aligned}$$

$$2E[A_1 A_2] = 2A_1 E[A_2] = 0 \quad (5.100)$$

$$2E[A_1 A_3] = 2A_1 E[A_3] = 0 \quad (5.101)$$

$$2E[A_1A_4] = 2A_1E[A_4] = 0 \quad (5.102)$$

$$2E[A_1A_5] = 2A_1E[A_5] = 0 \quad (5.103)$$

$$2E[A_1A_6] = 2A_1E[A_6] \quad (5.104)$$

$$2E[A_1A_7] = 2A_1E[A_7] \quad (5.105)$$

$$2E[A_1A_8] = 2A_1E[A_8] = 0 \quad (5.106)$$

$$2E[A_2A_3] = \frac{4}{(S_0 + N_0)^2} \int_{-a}^a \int_{-a}^a (a-t)(a-t')E[(s(t)n_1(t) - s(t-D)n_2(t))(n_1^2(t') - n_2^2(t'))] dt dt' = 0 \quad (5.107)$$

$$2E[A_2A_4] = \frac{-2}{(S_0 + N_0)^3} \int_{-a}^a \int_{-a}^a (a-t)(a-t')E[(s^2(t)\varepsilon_1 - s^2(t-D)\varepsilon_2)(n_1^2(t') - n_2^2(t'))] dt dt' = 0 \quad (5.108)$$

$$2E[A_2A_5] = \frac{-2}{(S_0 + N_0)^3} \int_{-a}^a \int_{-a}^a (a-t)(a-t')E[(n_1^2(t)\varepsilon_1 - n_2^2(t)\varepsilon_2)(n_1^2(t') - n_2^2(t'))] dt dt' = 0 \quad (5.109)$$

$$2E[A_2A_6] = \frac{-4}{(S_0 + N_0)^3} \int_{-a}^a \int_{-a}^a (a-t)(a-t')E[(s(t)n_1(t)\varepsilon_1 - s(t-D)n_2(t)\varepsilon_2)(n_1^2(t') - n_2^2(t'))] dt dt' \simeq 0 \quad (5.110)$$

$$2E[A_2A_7] = \frac{2}{(S_0 + N_0)^4} \int_{-a}^a \int_{-a}^a (a-t)(a-t')E[(s^2(t)\varepsilon_1^2 - s^2(t-D)\varepsilon_2^2)(n_1^2(t') - n_2^2(t'))] dt dt' \simeq 0 \quad (5.111)$$

$$2E[A_2A_8] = \frac{2}{(S_0 + N_0)^4} \int_{-a}^a \int_{-a}^a (a-t)(a-t')E[(n_1^2(t)\varepsilon_1^2 - n_2^2(t)\varepsilon_2^2)(n_1^2(t') - n_2^2(t'))] dt dt' \simeq 0 \quad (5.112)$$

$$\begin{aligned} 2E[A_3A_4] &= \frac{-4}{(S_0 + N_0)^3} \int_{-a}^a \int_{-a}^a (a-t)(a-t')E[(s(t)n_1(t) - s(t-D)n_2(t))(s^2(t)\varepsilon_1 - s^2(t-D)\varepsilon_2)] dt dt' \\ &= \frac{-8\sigma^2 T_0}{(S_0 + N_0)^3} \left(\frac{L^2}{2} S_0^2 + D^2 S_0^2 - LD S_0^2 \right) \\ &= \frac{-8 SNR_{s,2} T_0}{(1 + SNR_{s,2})^3 L} \left(\frac{L^2}{2} + D^2 - LD \right) \end{aligned} \quad (5.113)$$

$$\begin{aligned} 2E[A_3A_5] &= \frac{-4}{(S_0 + N_0)^3} \int_{-a}^a \int_{-a}^a (a-t)(a-t')E[(s(t)n_1(t) - s(t-D)n_2(t))(n_1^2(t')\varepsilon_1 - n_2^2(t')\varepsilon_2)] dt dt' \\ &= \frac{-8\sigma^4 T_0}{(S_0 + N_0)^3} \left(\frac{L^3}{2} S_0 - \frac{L^2 S_0 D}{2} \right) \\ &= \frac{-4 SNR_{s,2} T_0}{(1 + SNR_{s,2})^3} (L - D) \end{aligned} \quad (5.114)$$

$$\begin{aligned} 2E[A_4A_5] &= \frac{2}{(S_0 + N_0)^4} \int_{-a}^a \int_{-a}^a (a-t)(a-t')E[(s^2(t)\varepsilon_1 - s^2(t-D)\varepsilon_2)(n_1^2(t')\varepsilon_1 - n_2^2(t')\varepsilon_2)] dt dt' \\ &= \frac{8\sigma^4 T_0 S_0}{(S_0 + N_0)^4} \frac{L^2}{2} (LS_0 - DS_0) = \frac{4 SNR_{s,2}^2 T_0}{(1 + SNR_{s,2})^4} (L - D) \end{aligned} \quad (5.115)$$

Sustituyendo los términos no nulos en 5.91 y eliminando los que se cancelan procedentes de $E[\hat{D}_{s,2}^2]$ con los de $(E[\hat{D}_{s,2}])^2$ y los de orden $\frac{T_0^2}{L^2}$, se obtiene

$$\sigma_{\hat{D},2}^2 = E[\hat{D}_{s,2}] - (E[\hat{D}_{s,2}])^2 \quad (5.116)$$

$$\sigma_{\hat{D},2}^2 = E[A_2^2] + E[A_3^2] + E[A_4^2] + E[A_5^2] + 2E[A_3A_4] + 2E[A_3A_5] + 2E[A_4A_5] \quad (5.117)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{D},2}^2 &= \frac{4}{3} \frac{T_0 L}{(1 + SNR_{s,2})^2} + \frac{T_0 SNR_{s,2} 4}{(1 + SNR_{s,2})^2 L} \left[\frac{L^2}{2} + 2F + D^2 - DL \right] \\ &\quad + \frac{4 SNR_{s,2}^3 T_0}{(1 + SNR_{s,2})^4 L} \left[\frac{L^2}{2} + D^2 - LD \right] + \frac{2 SNR_{s,2} L T_0}{(1 + SNR_{s,2})^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{8 SNR_{s^2}^2 T_0}{(1 + SNR_{s^2})^3 L} \left[\frac{L^2}{2} + D^2 - LD \right] - \frac{4 SNR_{s^2} T_0}{(1 + SNR_{s^2})^3} [L - D] \\
& + \frac{4 SNR_{s^2}^2 T_0}{(1 + SNR_{s^2})^4} [L - D]
\end{aligned} \tag{5.118}$$

Operando sobre esta expresión se la puede reducir a la siguiente forma más compacta

$$\sigma_{\hat{D}_{s^2}}^2 = \frac{4 SNR_{s^2} T_0}{(1 + SNR_{s^2})^2} \left[\frac{\frac{D^2}{L} - \frac{3D}{4}}{(1 + SNR_{s^2})^2} + \frac{L}{3 SNR_{s^2}} + \frac{2F}{L} \right] \tag{5.119}$$

$$\sigma_{\hat{D}_{s^2}} = \frac{2(SNR_{s^2} T_0)^{\frac{1}{2}}}{(1 + SNR_{s^2})} \left[\frac{\frac{D^2}{L} - \frac{3D}{4}}{(1 + SNR_{s^2})^2} + \frac{L}{3 SNR_{s^2}} + \frac{2F}{L} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.120}$$

Nuevamente la desviación tipo del estimador \hat{D}_{s^2} depende directamente de la longitud de la ventana L y del retardo D , así como del periodo de muestreo T_0 y de un factor F que es función de la componente determinista de la señal $s(t)$. La dependencia con la SNR_{s^2} es inversamente proporcional como es lógico, ya que supone estar más cerca de las condiciones ideales donde el estimador es exacto. Asimismo, las frecuencias de muestreo altas favorecen la precisión en la estimación del WOT en una determinada señal.

La expresión de SNR_{s^2} se ha tomado distinta de SNR_s por conveniencia para el cálculo, y ello hace que no se comparen directamente las expresiones de las respectivas desviaciones tipo, dependiendo además la comparación de $s(t)$. En el apartado de simulación se verá como \hat{D}_{s^2} tiene menor desviación tipo que \hat{D}_s , lo que le hace más deseable para determinar el retardo D entre dos señales.

5.3.4 Estimador corregido \hat{D}'_{s^2}

En el apartado anterior se ha estudiado una primera aproximación del estimador \hat{D}_{s^2} en presencia de ruido. Con la hipótesis considerada del ruido, la cual se cumple aceptablemente en la señal ECG, este estimador es sesgado, con un sesgo que depende linealmente del retardo D existente entre las dos señales que se analizan y de la SNR_{s^2} (5.67). Aunque el comportamiento en cuanto a desviación tipo se verá en el próximo apartado que es mejor en \hat{D}_{s^2} que en \hat{D}_s , el hecho de que \hat{D}_{s^2} presente un sesgo le hace inapropiado para estimar D .

Observando que el sesgo depende linealmente de D , se puede proponer otro estimador \hat{D}'_{s^2} que lo corrija y cuya desviación tipo ($\sigma_{\hat{D}'_{s^2}}$) es mayor que $\sigma_{\hat{D}_s}$ pero menor que $\sigma_{\hat{D}_s}$, como se verá en el apartado 5.3.5. Ello lo convierte en un mejor estimador que \hat{D}_s y que \hat{D}_{s^2} , siendo este el estimador que se propone usar para determinar los WOT de las ondas del ECG.

Para definir este nuevo estimador se recalcula la estimación del retardo entre las señales $s(t)$ y $v(t - \tau)$ mediante el estimador \hat{D}_{s^2} . A la señal $v(t)$ se le ha introducido un retardo adicional y conocido τ , de modo que $v(t - \tau) = s(t - D - \tau)$. Para poder aplicar \hat{D}_{s^2} con el formalismo expuesto anteriormente, se deberá cumplir que $D + \tau < D_{max}$. Si no se verifica, se puede alargar el intervalo de integración $[-a, a]$ hasta que se cumpla, ya que en caso contrario la señal determinista no se encontraría entre los límites de integración del método e introduciría nuevas desviaciones en la estimación.

La nueva estimación se la denominará $\hat{D}_{s^2}(\tau)$, y de acuerdo con la expresión 5.66 que proporciona el valor esperado de este estimador, se observa que la dependencia de $\hat{D}_{s^2}(\tau)$ con τ es lineal. Así se puede escribir

$$\hat{D}_{s^2}(\tau) = \alpha\tau + \beta. \quad (5.121)$$

Por otro lado, sustituyendo en 5.66 el retardo D , que ahora se ha convertido en $D + \tau$, se puede escribir

$$\hat{D}_{s^2}(\tau) = (D + \tau) \frac{SNR_{s^2}}{1 + SNR_{s^2}}. \quad (5.122)$$

Comparando las dos anteriores expresiones se tiene que

$$\alpha = \frac{SNR_{s^2}}{1 + SNR_{s^2}} \quad y \quad \beta = D \frac{SNR_{s^2}}{1 + SNR_{s^2}} \quad (5.123)$$

Si se define un nuevo estimador \hat{D}'_{s^2} como

$$\hat{D}'_{s^2} = \frac{\beta}{\alpha} = D \quad (5.124)$$

se tiene un estimador no sesgado en una primera aproximación, al igual que ocurría con \hat{D}_s . Los valores de β y α se obtienen mediante el cálculo de la recta de regresión que ajusta la función $\hat{D}_{s^2}(\tau)$ (5.121) para todos los τ_i considerados. Para ello se debe tomar un número (i) suficientemente grande de τ_i que permita una buena estimación de α y β .

Otra consideración sobre este estimador es decidir cuando es necesario aplicarlo o no, lo que se realiza con el siguiente criterio. Si el sesgo de $\hat{D}_{s,2}$ es mucho menor que la desviación tipo $\sigma_{\hat{D}_{s,2}}$, la mejora en el sesgo puede suponer un aumento, como de hecho ocurre y se verá en la simulación, en la $\sigma_{\hat{D}'_{s,2}}$ debido a la propia desviación en la medida de α y β . Este fenómeno da lugar a una peor estimación de D. El criterio de corrección o no para el estimador $\hat{D}_{s,2}$ se establecerá en función del sesgo $B_{s,2}$ y de la desviación tipo $\sigma_{\hat{D}_{s,2}}$.

Si $B_{s,2} \ll \sigma_{\hat{D}_{s,2}}$, entonces la aplicación de $\hat{D}'_{s,2}$ no tendrá sentido y sustituyendo las expresiones del sesgo 5.67 y desviación tipo 5.120 se tiene una cota para D por debajo de la cual no se mejora la estimación usando $\hat{D}'_{s,2}$

$$D \ll (1 + SNR_{s,2})\sigma_{\hat{D}_{s,2}} \quad (5.125)$$

Se observa que el criterio de corrección depende del propio valor de D, L, y la $SNR_{s,2}$ a través de la expresión de la desviación tipo, así como de la propia forma de la señal determinista $s(t)$ a través de F .

5.3.5 Simulación

Para comprobar la validez de las expresiones derivadas en los apartados precedentes, se han considerado señales deterministas conocidas *a priori* a las cuales se les ha añadido ruido, generado por computador, de las características consideradas en 5.17 y con una SNR conocida. Se han tomado pares de señales deterministas $s(t)$ y $v(t)$ que son la misma señal con un retardo D introducido artificialmente y conocido. En estas condiciones se puede calcular teóricamente el valor esperado y la desviación tipo de cada estimador, según las expresiones previamente derivadas. Por otro lado, se ha aplicado cada uno de los estimadores sobre 500 parejas de señales ($s(t)$, $v(t)$) con distintas realizaciones de ruido. Sobre los 500 valores obtenidos por el estimador se ha calculado el valor medio y la desviación tipo, que serán los valores a comparar con los predichos teóricamente.

Las señales deterministas consideradas son por un lado una señal Gaussiana generada por computador, y por otro un QRS real procedente de un registro de ECG. En ambos casos, las señales $s(t)$ y $v(t) = s(t - D)$ están retardadas un valor $D=10$ ms y se

extienden en un intervalo $[-a, a]$ de duración $L=100$ ms. Las señales se han tomado digitalizadas a una frecuencia de muestreo $f_m = 1$ kHz, lo que supone que $T_0 = 1$ ms. Se han calculado los retardos dados por los tres estimadores \hat{D}_s , \hat{D}_{s^2} y \hat{D}'_{s^2} en los 500 pares de registros retardados y para unas $SNR_{s^2} = 1, 5, 10, 10^2, 10^3, 10^4$, y 10^5 .

La determinación de la SNR_s en función de la SNR_{s^2} se hace comparando las expresiones de 5.42 y 5.64, obteniéndose la siguiente relación:

$$SNR_s = \frac{SNR_{s^2} \left(\int_{-a}^a s(t) dt \right)^2}{L \int_{-a}^a s^2(t) dt} \quad (5.126)$$

Esta expresión relación se usará para el cálculo teórico de $\sigma_{\hat{D}_s}$ en 5.57, conveniencia y simplicidad. La forma más común de expresar la SNR es en dB y puede obtenerse a partir de SNR_{s^2} mediante la relación:

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} SNR_{s^2} \quad (5.127)$$

5.3.5.1 Simulación con señales Gaussianas

En esta primera simulación se toma como señal determinista $s(t)$ una Gaussiana generada por computador con una desviación tipo de 5 ms y que tiene la forma

$$s(t) = A e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = A e^{-\frac{t^2}{50}} \quad (5.128)$$

Se han generado 500 pares de realizaciones $s(t) + n_{1i}(t)$, $s(t - D) + n_{2i}(t)$ con $i = 1, \dots, 500$. En la figura 5.1 se muestran las señales Gaussianas originales retardadas una distancia D , y alguna de las 500 realizaciones de pares de éstas con ruido añadido para una $SNR_{s^2} = 10$

Para realizar todos los cálculos teóricos se necesita conocer el valor de F para obtener $\sigma_{\hat{D}_{s^2}}$, y el valor de la relación entre SNR_s y SNR_{s^2} . Ambos pueden determinarse a partir de la expresión analítica de $s(t)$.

Sustituyendo en 5.126 resulta:

$$SNR_s = \frac{SNR_{s^2} \left(\int_{-50}^{50} A e^{-\frac{t^2}{50}} dt \right)^2}{100 \int_{-50}^{50} A^2 e^{-\frac{t^2}{25}} dt} \quad (5.129)$$

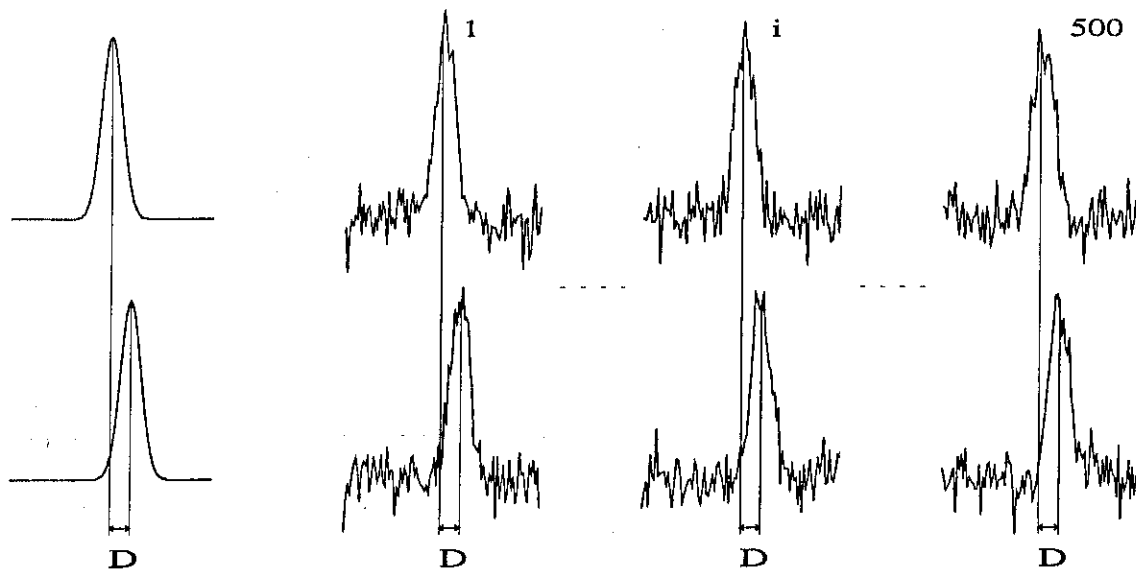


Figura 5.1: Señal Gaussiana $s(t)$ generada por computador.

Las señales de la izquierda corresponden a la señal Gaussiana, la superior es $s(t)$ y la inferior es ella misma desplazada una distancia D $s(t-D)$. A la derecha de éstas se encuentran representados algunos de los i ($i = 1, \dots, 500$) pares generados por computador añadiendo ruido sobre $s(t)$ y $s(t-D)$ con una $SNR_{s^2} = 10$, y sobre los que se aplicarán los estimadores de tiempo de retardo.

y operando se obtiene

$$SNR_s = \frac{\sqrt{\pi}}{10} SNR_{s,2}. \quad (5.130)$$

Esta relación permite calcular $\sigma_{\hat{D}_s}$, directamente a partir de $SNR_{s,2}$, que es la SNR utilizada en la generación de las realizaciones de la señal.

Calculando análogamente el valor de F a partir de la expresión 5.93, resulta

$$F = \frac{\int_{-50}^{50} A^2 e^{-\frac{t^2}{25}} dt}{\int_{-50}^{50} A^2 e^{-\frac{t^2}{25}} dt} = 12.50 \quad (5.131)$$

Sin más que sustituir estos valores en las expresiones del valor esperado, calculadas en primera aproximación, para cada uno de los estimadores considerados, y en las expresiones de la desviación tipo, se obtienen los valores deducidos teóricamente. Aplicando cada estimador en cada caso se obtienen los valores experimentales que se compararán con los predichos teóricamente.

En la tabla 5.1 se representan los valores esperados de cada estimador en primera aproximación y las desviaciones tipo en segunda aproximación.

Examinando la tabla 5.1 se ve cómo efectivamente los resultados obtenidos por cada una de las expresiones derivadas analíticamente y los determinados experimentalmente coinciden con bastante precisión. Las diferencias en los $E[\hat{D}]$ son del orden del 1% para las menores $SNR_{s,2}$ consideradas, y disminuyen a medida que la $SNR_{s,2}$ aumenta. Se comprueba cómo efectivamente el estimador $\hat{D}_{s,2}$ es sesgado y el sesgo está bien determinado por la expresión 5.67. En el caso de $\sigma_{\hat{D}_{s,2}}$ se obtiene un peor acuerdo entre la teoría y la experiencia para bajas $SNR_{s,2}$: en el caso más desfavorable ($SNR_{s,2} = 1$) hay un error de aproximadamente el 50 %. En estos casos, una aproximación de orden superior permitiría mejorar los resultados, pero en cualquier caso la aproximación analítica desarrollada siempre estima el orden de magnitud de la desviación tipo, y por tanto resulta una expresión válida y muy útil para determinar *a priori* la fiabilidad y limitaciones del método de estimación de WOT en cada caso. De este modo se puede acotar el rango de validez de los procesados posteriores usando los WOT así determinados.

Analizando el comportamiento de $\hat{D}'_{s,2}$ se ve que efectivamente éste corrige el sesgo introducido por $\hat{D}_{s,2}$, pero aumenta la desviación tipo de la estimación. Este incremento

	SNR_{s^2}	1	5	10	10^2	10^3	10^4	10^5
	SNR_s	0.18	0.88	1.77	17.72	177.2	1772	17725
$E[\hat{D}_s]$	T	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00
(ms)	E	10.16	10.07	10.05	10.01	10.00	10.00	10.00
$\sigma(\hat{D}_s)$	T	9.90	4.48	3.15	0.99	0.31	0.10	0.03
(ms)	E	9.55	4.27	3.02	0.96	0.30	0.10	0.03
$E[\hat{D}'_s]$	T	5.00	8.33	9.09	9.90	9.99	10.00	10.00
(ms)	E	5.03	8.36	9.11	9.91	9.99	10.00	10.00
$\sigma(\hat{D}'_s)$	T	5.65	1.93	1.08	0.15	0.03	0.01	0.00
(ms)	E	2.85	0.99	0.57	0.11	0.03	0.01	0.00
$E[\hat{D}'_s]$	T	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00
(ms)	E	9.61	9.84	9.90	9.89	9.89	9.89	9.89
$\sigma(\hat{D}'_s)$	E	5.87	2.15	1.05	0.15	0.03	0.01	0.00

Tabla 5.1: Resultados en simulación de la media y la desviación tipo con señales Gaussianas.

Se presentan los valores esperados $E[\hat{D}]$ en primera aproximación y las desviaciones tipo $\sigma_{\hat{D}}$ en segunda aproximación, donde \hat{D} representa cada uno de los estimadores considerados. Se presenta la estimación teórica (T) y la experimental (E). En el caso de $\sigma_{\hat{D}'_s}$ sólo se presenta la estimación experimental ya que para este estimador no se ha derivado una expresión analítica que aproxime este comportamiento.

no llega en ningún caso a ser comparable con la $\sigma_{\hat{D}_{s,2}}$, resultado que pone de manifiesto que el estimador $\hat{D}'_{s,2}$ es el más apropiado sobre todo para bajas $SNR_{s,2}$.

En cuanto al criterio de corrección del estimador $\hat{D}_{s,2}$ mediante el $\hat{D}'_{s,2}$ se observa que el sesgo introducido por $\hat{D}_{s,2}$ para $SNR_{s,2} \gg 10^2$ ya no es mejorado por $\hat{D}'_{s,2}$ y la $\sigma_{\hat{D}'_{s,2}}$ es mayor que la $\sigma_{\hat{D}_{s,2}}$. Calculando el sesgo $B_{\hat{D}_{s,2}}$ y la desviación tipo $\sigma_{\hat{D}_{s,2}}$ para distintas $SNR_{s,2}$ se obtiene la siguiente tabla que permite evaluar el criterio de corrección (5.125).

$SNR_{s,2}$	1	10	10^2	10^3
$B_{\hat{D}_{s,2}}$	5	0.91	0.10	0.01
$\sigma_{\hat{D}_{s,2}}$	5.65	1.08	0.15	0.03

Tabla 5.2: Criterio de corrección del estimador $\hat{D}_{s,2}$. Se presentan el sesgo $B_{\hat{D}_{s,2}}$ y la desviación tipo $\sigma_{\hat{D}_{s,2}}$.

Por tanto, están de acuerdo la previsión de que cuando $B_{\hat{D}_{s,2}} \ll \sigma_{\hat{D}_{s,2}}$ la corrección mediante $\hat{D}'_{s,2}$ empeora la estimación, debido a que introduce una mayor dispersión. Para $SNR_{s,2} = 10^2$ se tiene $0.10 < 0.15$.

El concepto de $B_{\hat{D}_{s,2}} \ll \sigma_{\hat{D}_{s,2}}$ es algo que podría fijarse con un posterior desarrollo analítico y que en este momento se ve reducido a la experimentación. Se observa que para relaciones de $0.10 \ll 0.15$ ya no vale la pena corregir; sin embargo, para $SNR_{s,2} = 10$, que supone una relación $0.91 < 1.08$, todavía se mejora usando el estimador corregido $\hat{D}'_{s,2}$. Un posterior estudio para predecir la $\sigma_{\hat{D}'_{s,2}}$ sería interesante y útil, ya que en este momento sólo se tiene una estimación experimental de su valor.

5.3.5.2 Simulación con QRS reales

La aplicación de este método de estimación de WOT se pretende realizar sobre las ondas de la señal ECG. Una Gaussiana puede tener cierto parecido con alguna de las ondas del ECG (P,T), pero lo que parece más correcto es validar este método con una señal real proveniente de un registro de ECG.

A tal efecto se ha tomado un registro de un QRS que se extiende también 100 ms y que se ha tomado como señal determinista $s(t)$. La frecuencia de muestreo, retardo añadido y longitud de la señal son las mismas que en el caso de señal Gaussiana ($L=100$ ms, $D=10$ ms, $T_0=1$ ms) y las SNR_{s^2} consideradas también son idénticas al caso anterior.

En la figura 5.2 se representa el QRS seleccionado con otro retardado una distancia D , así como distintas realizaciones para $SNR_{s^2} = 10$. La relación entre SNR_{s^2} y

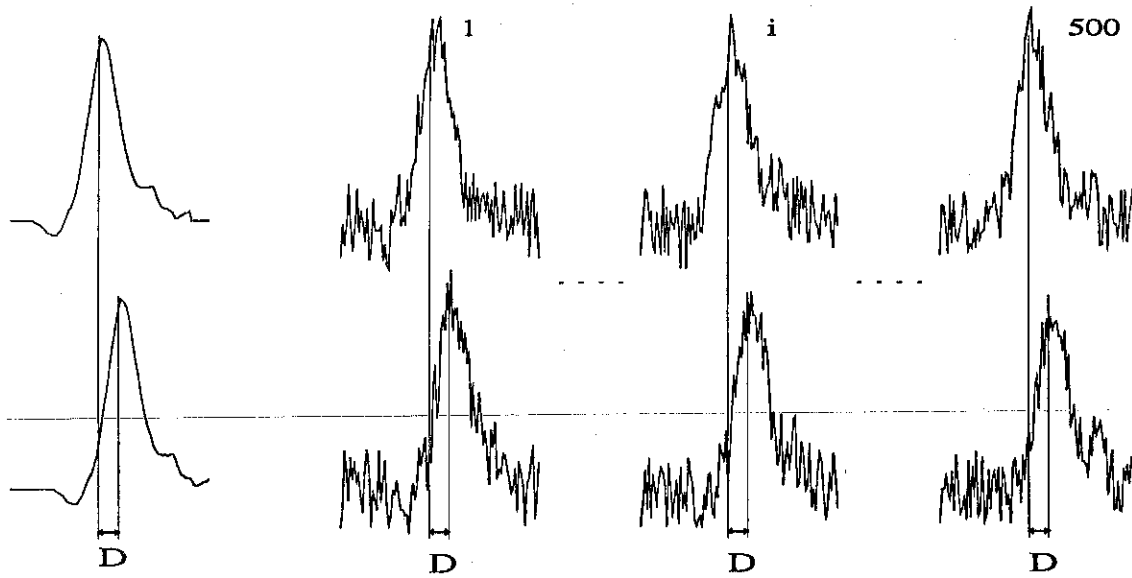


Figura 5.2: Señal QRS ($s(t)$) proveniente de un registro real.

Las señales de la izquierda corresponden a la señal QRS, la superior es $s(t)$ y la inferior es ella misma desplazada una distancia D $s(t-D)$. A la derecha de éstas se encuentran representados algunos de los i ($i = 1, \dots, 500$) pares generados por computador añadiendo ruido sobre $s(t)$ y $s(t-D)$ con una $SNR_{s^2} = 10$, y sobre los que se aplicarán los estimadores de tiempo de retardo.

SNR_s viene dada ahora por

$$SNR_s = \frac{SNR_{s^2} \left(\int_{-50}^{50} QRS(t) dt \right)^2}{100 \int_{-50}^{50} QRS(t)^2 dt} \quad (5.132)$$

Realizando el cálculo por computador se tiene

$$SNR_s = 0.31 SNR_{s^2} \quad (5.133)$$

y el valor del parámetro F es

$$F = \frac{\int_{-50}^{50} QRS^2(t)t^2 dt}{\int_{-50}^{50} QRS(t) dt} = 53.84 \quad (5.134)$$

Procediendo análogamente al caso de señal Gaussiana se obtiene la tabla 5.3

	$SNR_{s,2}$	1	5	10	10^2	10^3	10^4	10^5
	SNR_s	0.31	1.54	3.08	30.81	308.1	3081	38013
$E[\hat{D}_s]$	T	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00
(ms)	E	11.35	10.51	10.35	10.10	10.03	10.01	10.00
$\sigma(\hat{D}_s)$	T	7.56	3.38	2.40	0.75	0.24	0.08	0.02
(ms)	E	7.67	3.29	2.31	0.73	0.23	0.07	0.02
$E[\hat{D}'_s]$	T	5.00	8.33	9.09	9.90	9.99	10.00	10.00
(ms)	E	5.30	8.50	9.21	9.92	9.99	10.00	10.00
$\sigma(\hat{D}'_s)$	T	5.73	2.05	1.20	0.23	0.06	0.02	0.01
(ms)	E	1.98	0.91	0.63	0.19	0.06	0.02	0.01
$E[\hat{D}'_s]$	T	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00
(ms)	E	8.67	10.52	10.49	10.45	10.43	10.42	10.42
$\sigma(\hat{D}'_s)$	E	5.24	1.91	1.28	0.37	0.12	0.04	0.01

Tabla 5.3: Resultados en simulación de la media y la desviación tipo con señales QRS reales.

Se presentan los valores esperados $E[\hat{D}]$ en primera aproximación y las desviaciones tipo $\sigma_{\hat{D}}$ en segunda aproximación, donde \hat{D} representa cada uno de los estimadores considerados. Se presenta la estimación teórica (T) y la experimental (E). En el caso de $\sigma_{\hat{D}'_s}$ sólo se presenta la estimación experimental ya que para este estimador no se ha derivado una expresión analítica que aproxime este comportamiento.

Analizando la tabla 5.3 se pueden extraer las mismas consideraciones que del caso anterior, y por tanto estos resultados pueden ser extrapolados cuando se estiman los WOT mediante este método en la señal ECG. Nótese que la única diferencia entre el caso de señal Gaussiana o QRS reside en el parámetro dependiente de la señal F, y las variaciones en la teoría de un caso a otro se corresponden con variaciones en la práctica en el mismo sentido, salvo en el caso ya comentado de $\sigma_{\hat{D}'_s}$ para bajas $SNR_{s,2}$.

5.4 Aplicación a la estimación de la SNR

Cuando se ha estudiado el estimador $\hat{D}_{s,2}$ se ha puesto en evidencia el hecho de que éste tiene un sesgo proporcional al retardo real D existente entre las dos realizaciones de la señal en las que se aplica. Esta propiedad puede ser aprovechada para obtener una estimación de la SNR y en particular de $SNR_{s,2}$ cuando ésta es desconocida (caso más general), pero el ruido satisface las condiciones de 5.17.

Para ello se considera las dos señales $s(t)$ y $s(t-D)$ contaminadas con ruido de las mismas características, pero con una SNR desconocida. Aplicando el estimador $\hat{D}'_{s,2}$, que en definitiva es aplicar $\hat{D}_{s,2}$ en repetidas ocasiones con $s(t-D)$ convertida en $s(t-D-\tau)$, se puede obtener el valor de α mediante la recta de regresión

$$\hat{D}_{s,2}(\tau) = \alpha\tau + \beta. \quad (5.135)$$

De acuerdo con 5.123:

$$\alpha = \frac{SNR_{s,2}}{1 + SNR_{s,2}}. \quad (5.136)$$

Por tanto, despejando el valor de $SNR_{s,2}$ se tiene que

$$SNR_{s,2} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}. \quad (5.137)$$

La determinación de α permite una estimación de $SNR_{s,2}$ a través de la expresión 5.137, en el supuesto de que el ruido cumple las condiciones requeridas en esta deducción.

Para comprobar la validez de este método de estimación de la SNR, se denomina $SNR'_{s,2}$ a la SNR estimada mediante la sistemática descrita. Se toma la señal Gaussiana usada previamente en la simulación y cuya $SNR_{s,2}$ se conoce exactamente y se estima sobre ella la $SNR'_{s,2}$. En la tabla 5.4 se muestran los resultados de esta comprobación.

Examinando esta tabla se observa que este método indirecto de estimación de la SNR da valores muy aproximados a los reales y por tanto puede considerarse efectivo. Esta estimación puede luego usarse en las expresiones de $\sigma_{\hat{D}_1}$, $\sigma_{\hat{D}_2}$ y $E[\hat{D}_{s,2}]$, teniendo así una estimación de estos valores incluso sin conocer *a priori* la $SNR_{s,2}$, como se había considerado hasta ahora.

La utilidad de contar con esta información adicional tiene una gran importancia en el procesado de ECG, ya que permite evaluar la frecuencia de corte f_c que se tiene

SNR_{s_2}	1	5	10
α	0.52 ± 0.18	0.82 ± 0.07	0.89 ± 0.04
SNR'_{s_2}	1.08 ± 0.78	4.55 ± 2.16	8.09 ± 3.30

Tabla 5.4: Estimación de la SNR.

Para el caso de señal Gaussiana con $SNR_{s_2} = 1, 5$ y 10 , se muestran el valor estimado de α como la media del estimado en 100 pares de realizaciones y su desviación tipo. Asimismo se presenta el valor de SNR'_{s_2} a que da lugar y se observa como éste constituye una buena estimación de SNR_{s_2} .

en un proceso de promediado, según se expuso en la introducción a este capítulo. De este modo se conoce que la señal determinista con espectro no nulo en frecuencias superiores a f_c se elimina, y la de frecuencias inferiores permanece, caso de que exista. Asimismo, en el estudio de la HRV y la variabilidad del intervalo PR, donde variabilidades menores que la $\sigma_{\hat{D}}$ del método no podrán distinguirse de la propia precisión de la estimación, se puede tener un conocimiento del límite de la estimación y acotar e interpretar así los resultados correctamente.

5.5 Aplicación a la medida de intervalos latido a latido en el ECG

En la introducción se ha comentado que las dos aplicaciones más clásicas de la estimación de WOT en el ECG son el promediado de señal y la determinación de intervalos temporales latido a latido. En este apartado se va a plantear la medida de intervalos temporales latido a latido y en un mismo latido mediante el método descrito para estimar los WOT en el ECG (Laguna y otros, 1990c).

El intervalo temporal entre ondas más clásicamente medido es el RR. Este se usa como medida del ritmo cardiaco, y a partir de él suele analizarse la variabilidad del ritmo cardiaco o HRV. Sin embargo, el latido cardiaco se inicia en el nodo seno auricular (SA), y por tanto son las ondas P y no los complejos QRS los que definen

el inicio de un latido (Rompelman y otros, 1982). Consecuentemente, el intervalo PP debería ser el utilizado para medir el ritmo cardiaco. La razón por la que esto no se hace es porque la onda P es de menor SNR (de 5 a -5 dB) que el complejo QRS, y por tanto más difícil de determinar que éste. Los detectores de ondas P son poco robustos e imprecisos, debido precisamente a la baja SNR presente en la onda P. Así, lo más común es tomar un detector de QRS, que es más robusto y preciso que uno de ondas P, definiéndose de este modo el ritmo cardiaco como la distancia entre marcas consecutivas de QRS, dadas por el detector.

La determinación del ritmo cardiaco mediante la medida del RR en lugar del PP sería exactamente válida si el intervalo PR fuese constante en todos los latidos. Esto no es así, aunque la variabilidad del intervalo PR es en muchos casos (reposo o escasa carga física) comparable a la precisión de la mayoría de los detectores de QRS (Rompelman y otros, 1982). Por tanto, puede considerarse el intervalo RR como una medida del intervalo PP con la precisión del detector.

Hay situaciones, sin embargo, donde la variabilidad del intervalo PR es mayor (fenómeno de Wenckebach (Webster, 1978), fuerte ejercicio físico, ...), en cuyo caso el valor del intervalo RR no será una buena medida del ritmo cardiaco. Por otro lado, si se consigue un detector de QRS cuya precisión sea superior a la variabilidad normal del intervalo PR, se habrá mejorado la medida del RR, pero no en cuanto a su utilización como medida de PP ya que la variabilidad del PR sigue introduciendo la misma imprecisión.

Este error cometido al tomar el RR como PP no es importante cuando se trata solamente de medir el ritmo cardiaco en valor absoluto, pero sí que puede serlo cuando lo que se pretende es determinar la HRV, ya que en ese caso las variaciones del intervalo PR se tomarían como HRV.

En este apartado se presenta un método de medida del intervalo PP a partir de un detector de QRS y del estimador de tiempo de retardo entre dos señales, previamente estudiado. Este método podrá generalizarse para la medida de los intervalos RR y TT con mayor exactitud que la obtenida por un detector de presencia.

Se propone asimismo un procedimiento de medida del intervalo PR usando el estimador de tiempo de retardo ya comentado, dado que es un intervalo de gran interés

clínico. Su variabilidad en un sujeto en reposo se usa en la determinación no invasiva de la actividad de His-Purkinje en la superficie del cuerpo, lo que permite separar la actividad de la aurícula de la propia de His-Purkinje (Ros y otros, 1981). Análogamente puede extenderse este procedimiento a la medida del intervalo QRS-T, en el supuesto que ahora es la distancia entre ondas y no entre principio y fin de ondas, como se ha considerado en el capítulo 3.

5.5.1 Descripción del método de medida de intervalos temporales

Como ya se ha comentado, se hace uso de un detector de QRS y de un estimador del tiempo de retardo. Primeramente actúa el detector de QRS que define la posición temporal de cada i -ésimo complejo QRS ($QRS(i)$). A partir de este punto, y a una distancia fija, se define una ventana que contiene a la onda P, denominándose W_p a su anchura. En la figura 5.3 se presenta un registro de señal ECG que contiene dos latidos cardiacos, y sobre el que están marcadas las posiciones $QRS(i)$ dadas por el detector de QRS y las ventanas abiertas, de modo que contienen a la onda P. Análogamente pueden abrirse ventanas de anchura W_{qrs} y W_t que contengan a las ondas complejo QRS y T, respectivamente. En la figura 5.3 se presentan también las ventanas abiertas de modo que contienen a los complejos QRS y ondas T.

Las ventanas abiertas de modo que contengan una determinada onda (P, QRS, T) son realizaciones de una señal ($p(t)$, $qrs(t)$, $t(t)$). Si los intervalos PR y QRS-T no son constantes, o la posición $QRS(i)$ dada por el detector tiene cierta variabilidad de un latido a otro, las posiciones de cada onda dentro de la ventana estarán retardadas en una realización con respecto a la otra. Los retardos entre las realizaciones correspondientes al latido $i - 1$ y al i para las ondas P, QRS y T se denominarán τ_{P_i} , τ_{QRS_i} y τ_{T_i} , respectivamente. Estos retardos entre dos señales de la misma forma $s(t)$ y $s(t - D)$ (figura 5.4) son los que serán medidos con el método expuesto y analizado en este capítulo.

Una vez calculados los retardos entre realizaciones consecutivas de la misma onda, se puede calcular el valor de los intervalos PP, RR y TT correspondientes a un latido i ($i > 1$). El valor de estos intervalos será la distancia que separa ventanas consecutivas de una misma onda ($QRS(i) - QRS(i - 1)$), más el retardo entre las realizaciones de

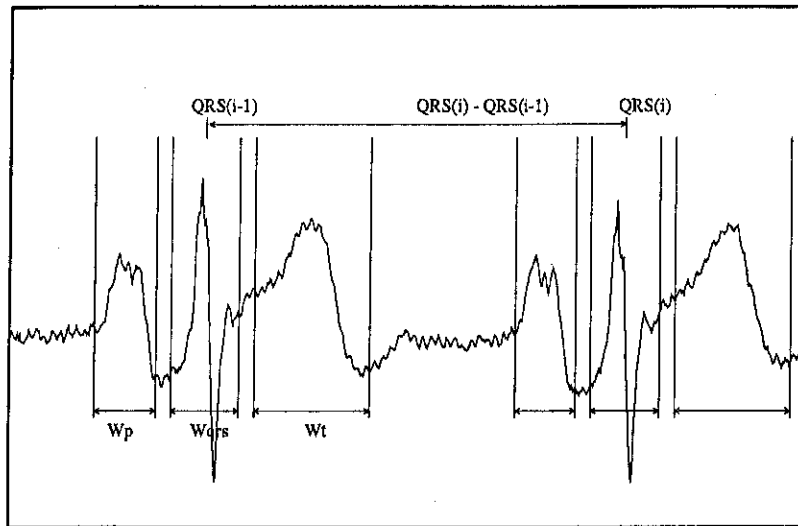


Figura 5.3: *Definición de ventanas para la medida de intervalos temporales.*

Señal ECG original, con las marcas dadas por el detector de QRS ($QRS(i)$) y las ventanas abiertas de modo que contienen las diferentes ondas de cada latido. W_p , W_{qrs} y W_t son las anchuras de las ventanas que contienen las ondas P, QRS y T, respectivamente.

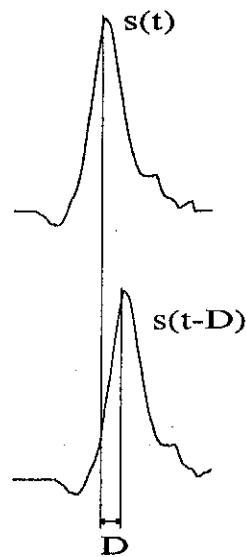


Figura 5.4: *Dos realizaciones (ventanas) de una onda $s(t)$ retardadas una distancia temporal D .*

señal contenidas en estas ventanas. Así, si se denota por PP_i , RR_i y TT_i los intervalos entre el latido $i - 1$ y el latido i , se puede escribir:

$$PP_i = (QRS(i) - QRS(i - 1)) + \tau_{P_i} \quad (5.138)$$

$$RR_i = (QRS(i) - QRS(i - 1)) + \tau_{QRS_i} \quad (5.139)$$

$$TT_i = (QRS(i) - QRS(i - 1)) + \tau_{T_i} \quad (5.140)$$

Estas son las expresiones a través de las cuales se obtienen los valores de los distintos intervalos. Estos valores son más precisos que los dados por el propio detector de QRS ($QRS(i) - QRS(i - 1)$) en la medida en que el estimador de tiempo de retardo sea más preciso que el detector. La precisión de este estimador ha sido ya ampliamente analizada en las secciones precedentes, y un estudio en simulación con distintos tipos de ondas del ECG, entre las que se encuentran ondas P, puede encontrarse en (Jané y otros, 1990a).

Para calcular los intervalos, no entre latidos sino dentro de cada latido, es decir PR y QRS-T, se hace uso de una expresión recursiva. Esta dará el valor de estos intervalos (PR_i , $QRS-T_i$) en el latido i en función del valor anterior en el latido $i - 1$ (PR_{i-1} , $QRS-T_{i-1}$) y de los retardos entre las ondas que definen el intervalo en consideración en el latido i , y sus correspondientes en el latido anterior $i - 1$. La expresión para PR_i y $QRS-T_i$ es

$$PR_i = PR_{i-1} + \tau_{QRS_i} - \tau_{P_i} \quad (5.141)$$

$$QRS-T_i = QRS-T_{i-1} + \tau_{T_i} - \tau_{QRS_i} \quad (5.142)$$

Se precisa, por tanto, una inicialización en el latido inicial o en alguno especialmente libre de ruido. Los instantes de tiempo en los que ocurren las ondas P, QRS y T (P_0 , QRS_0 y T_0) en el latido de inicialización han sido definidos del siguiente modo:

$$P_0 = \frac{\int_{a_p}^{b_p} t p^2(t) dt}{\int_{a_p}^{b_p} p^2(t) dt} \quad (5.143)$$

$$QRS_0 = \frac{\int_{a_{qrs}}^{b_{qrs}} t qrs^2(t) dt}{\int_{a_{qrs}}^{b_{qrs}} qrs^2(t) dt} \quad (5.144)$$

$$T_0 = \frac{\int_{a_t}^{b_t} t t^2(t) dt}{\int_{a_t}^{b_t} t^2(t) dt} \quad (5.145)$$

donde $[a_p, b_p]$, $[a_{qrs}, b_{qrs}]$ y $[a_t, b_t]$ son los límites temporales inicial y final de las ventanas que contienen las ondas P, QRS, y T, respectivamente.

Esta definición del instante de ocurrencia de cada onda correspondería al centro de gravedad si la señal al cuadrado se considera como una distribución de masa. Se ha tomado de este modo para estar en sintonía con la definición del propio estimador que, como ya se comentó en el apartado 5.3.1.1, calcula el retardo como la distancia entre centros de gravedad de estas ondas.

A continuación se analizan las limitaciones en la exactitud de este método de medida de intervalos. Primero existe un límite de precisión que es el debido a la discretización temporal, que introduce un error en la estimación (Koeleman y otros, 1985) con una desviación tipo σ proporcional al periodo de muestreo T_0 ($\sigma = T_0/2\sqrt{3}$). Este error para una frecuencia de 1 kHz se convierte en una desviación tipo $\sigma = 0.3$ ms, que resulta despreciable, ya que es de un orden de magnitud menor que las desviaciones tipo del intervalo PR. Otros intervalos (QRS-T, PP, ...) presentan una variabilidad aún mayor y por tanto el error sigue siendo despreciable.

Por otro lado, el estimador de tiempo de retardo se ha visto que es exacto en señales libres de ruido y sin variación de forma, pero este hecho nunca ocurre en la realidad. Las señales presentan ruido de distintos tipos e incluso variaciones en su morfología. En el apartado de simulación se ha obtenido que para SNR de 0 dB ($SNR_{s,2} = 1$) el estimador tiene una desviación tipo de aproximadamente 5 ms, y para 10 dB ($SNR_{s,2} = 10$) en torno a 1 ms.

Las ondas P generalmente tienen SNR de este orden y por tanto cuando la variabilidad del intervalo PR esté en estos rangos, el método de medida expuesto no presentará una mejora sustancial al analizar la HRV con el intervalo PP en lugar de con el RR. Ello es debido a que la imprecisión en la medida es del orden de la diferencia de variabilidad entre PP y RR. Por otro lado, el método dará una idea del valor absoluto del PR entendido como distancia entre ondas, pero no de su variabilidad.

En casos en los que la variabilidad del intervalo PR sea mayor, o que la SNR de la onda P también lo sea, y por tanto la precisión del método mejor, es cuando si que se pueden obtener medidas más precisas de variabilidad tanto del ritmo cardiaco HRV como del intervalo PR. Lo mismo puede argumentarse al medir la variabilidad

del intervalo QRS-T, si bien en condiciones normales ésta está comprendida entre 1 ms y 10 ms (Koeleman y otros, 1985), que es algo mayor que la del intervalo PR. Por tanto, son tolerables SNR menores en las señales, manteniéndose todavía medidas de variabilidad válidas para este intervalo.

5.5.2 Resultados sobre pacientes

El método presentado en el apartado anterior ha sido aplicado sobre la señal ECG perteneciente a distintos pacientes. Aquí se presentan los resultados obtenidos sobre dos de ellos (P1, P2). La variabilidad del intervalo PR en el primero es mayor que la precisión del método y en el segundo, es comparable.

El ECG pertenece a una derivación precordial, está muestreado a 1 kHz y el sistema de adquisición con el que se registro la señal es el descrito en 3.2.2.3.

Las ventanas se han tomado sobre la señal filtrada paso alto con el filtro usado en el detector selectivo de QRS. De este modo las variaciones de la línea de base no introducen variaciones en la señal $s(t)$ que pueden influir en el resultado obtenido por el estimador de tiempo de retardo. En la figura 5.5 se presenta en a) El ECG original correspondiente al paciente P1, y en b) el correspondiente a P2.

En la figura 5.6 se muestran los resultados de medir el PP (fig. 5.6 a), RR (fig. 5.6 b) y PR (fig. 5.6 c) en los 118 primeros latidos del registro ECG de P1. Para este paciente P1 las ventanas tienen las siguientes anchuras: $W_p = 200$ ms, $W_{qrs} = 180$ ms, y $W_t = 280$ ms. Además, las posiciones del centro de cada ventana respecto a la marca dada por el detector de QRS ($QRS(i)$) son: para la onda P, 180 ms anterior a la posición $QRS(i)$; para la onda T, 230 ms posterior a la posición $QRS(i)$, y para el complejo QRS el centro de la ventana se halla 20 ms antes de la marca $QRS(i)$.

Fijando la atención en el valor absoluto del intervalo RR o PP, ambos son prácticamente iguales. Sin embargo, el intervalo PR presenta una desviación tipo de 9 ms, mientras que la desviación de la estimación del método para SNR del orden mostrado en la figura 5.5 es menor de 5 ms (tablas 5.1 y 5.3). En cualquier caso, esta SNR es menor que la correspondiente a las figuras 5.1 y 5.2, $SNR_{s^2} = 10$. Ello permite considerar la medida de PP como mejor estimación del ritmo cardiaco que el

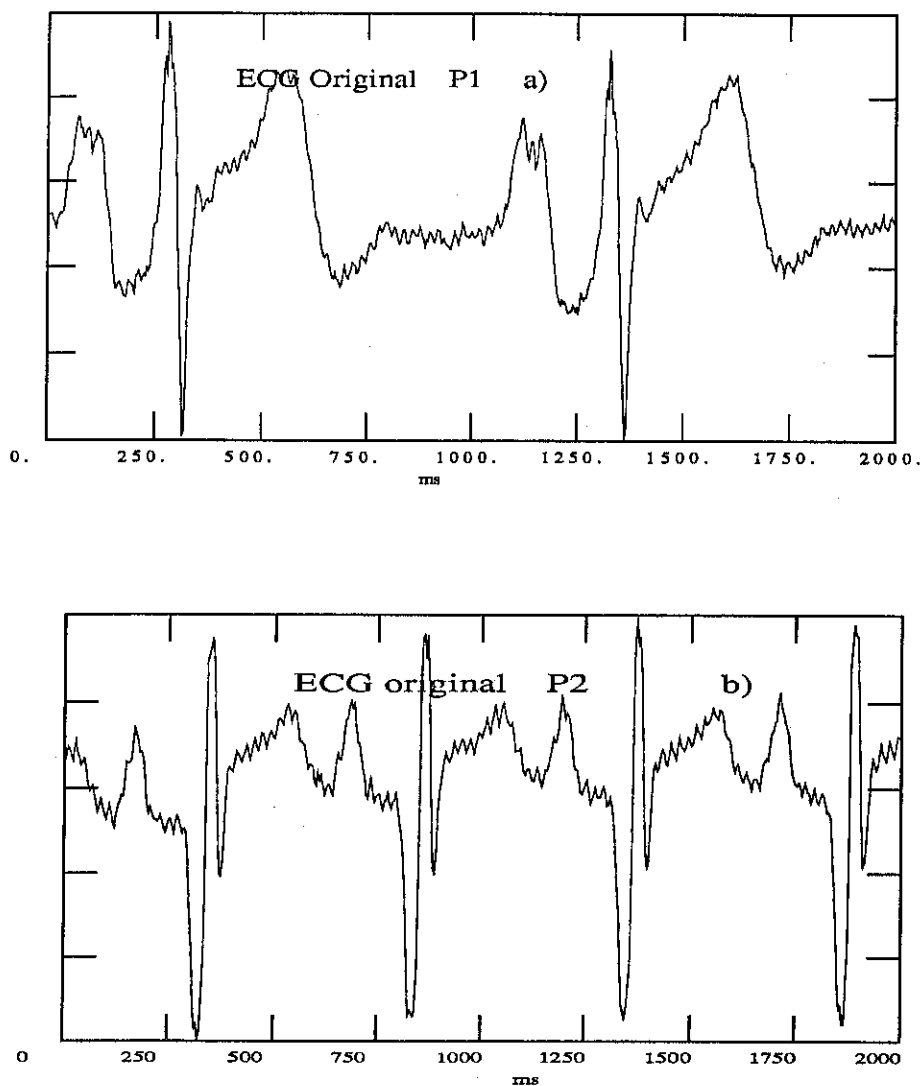


Figura 5.5: (a) *Dos segundos de señal ECG perteneciente al primer paciente P1 en que se han medido los distintos intervalos.* (b) *Mismo tiempo de ECG correspondiente a P2.*

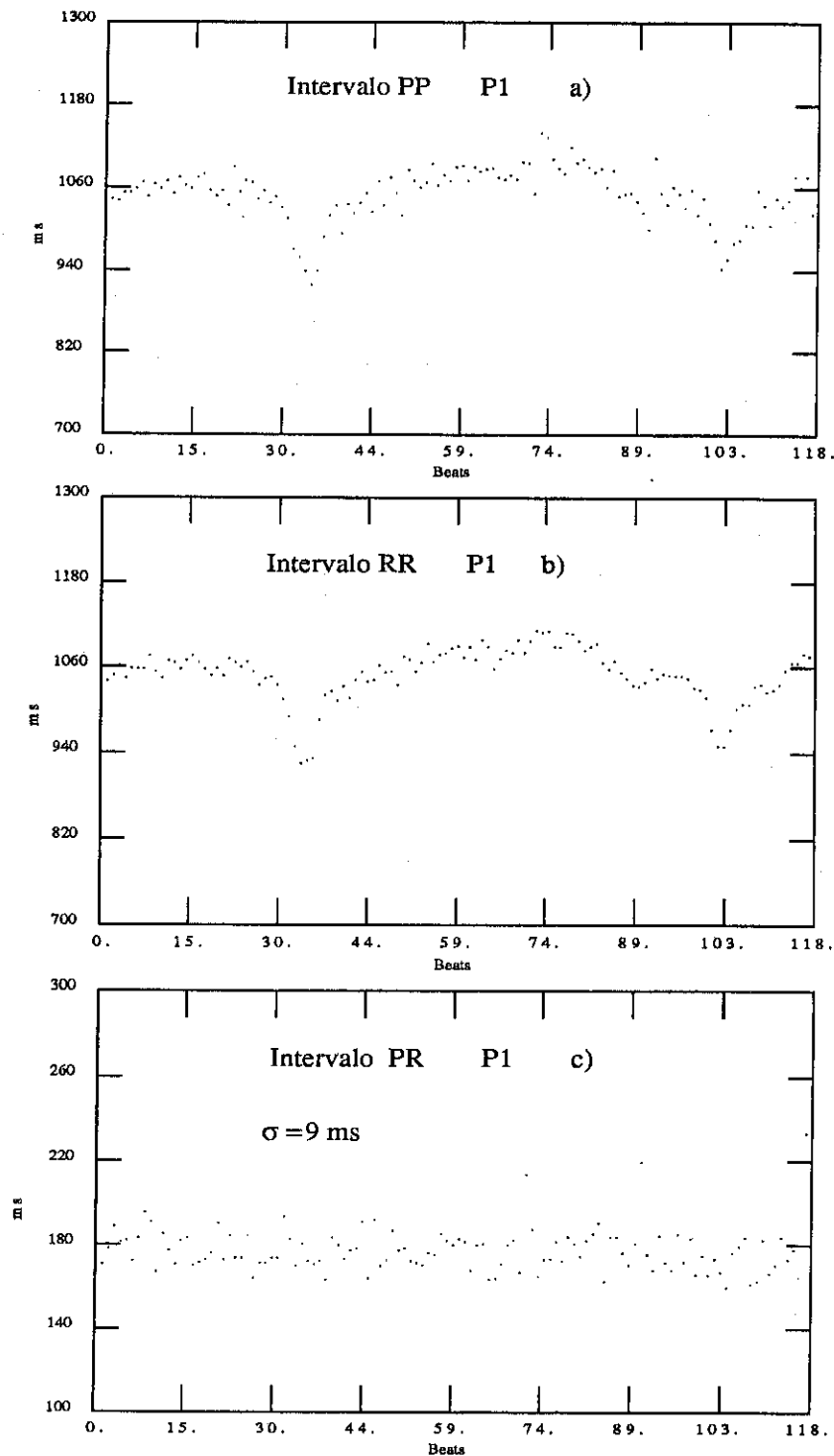


Figura 5.6: Intervalos medidos en el paciente P1.

(a) Intervalo PP en el paciente P1 medido según el método expuesto en el texto con la ecuación 5.138 en 118 latidos. (b) Intervalo RR en el mismo P1 según la ecuación 5.139. (c) Intervalo PR según la ecuación recursiva 5.141. La desviación tipo en los 118 latidos del intervalo PR es de 9 ms.

RR, y, por tanto, más idónea para analizar la HRV. Análogamente, la variabilidad del intervalo PR puede considerarse en parte como intrínseca del paciente y no generada por la imprecisión del método.

En las figuras 5.7 a, b y c se presentan los intervalos temporales correspondientes a P2. En este caso la variabilidad del PR puede ser comparable (4 ms) a la precisión del estimador (< 5 ms). Por tanto, en este paciente se obtendrá la misma precisión con el intervalo RR que con el PP al medir la HRV. Las dimensiones de las ventanas para P2 son: $W_p = 100$ ms, $W_{qrs} = 120$ ms y $W_t = 160$ ms; las posiciones de los centros de las ventanas a partir de $QRS(i)$ son 150 ms anterior para la onda P, 200 ms posterior para la onda T y 20 ms anterior para el complejo QRS.

A modo de ejemplo, en la figura 5.8 a y b se presentan el intervalo TT y el QRS-T, respectivamente. Se puede observar como la variabilidad de TT es mayor que la de PP o RR. Esto es debido a que la variabilidad intrínseca del intervalo QRS-T es mayor que del PR y por tanto redundante en una mayor variabilidad del TT.

Del mismo modo que se han determinado los intervalos temporales en estos registros de ECG, se ha repetido la medida en las mismas señales pero muestreadas a 500 y 250 Hz. En ningún caso se han encontrado diferencias significativas con los resultados anteriormente expuestos. En el caso de 250 Hz, el error de discretización tiene una desviación tipo $\sigma = 1.2$ ms, que todavía es pequeña comparada con las variabilidades intrínsecas de los distintos intervalos. Por ello no se aprecian diferencias significativas con las diferentes frecuencias de muestreo consideradas, y que cubren el rango más comúnmente usado en Electrocardiografía.

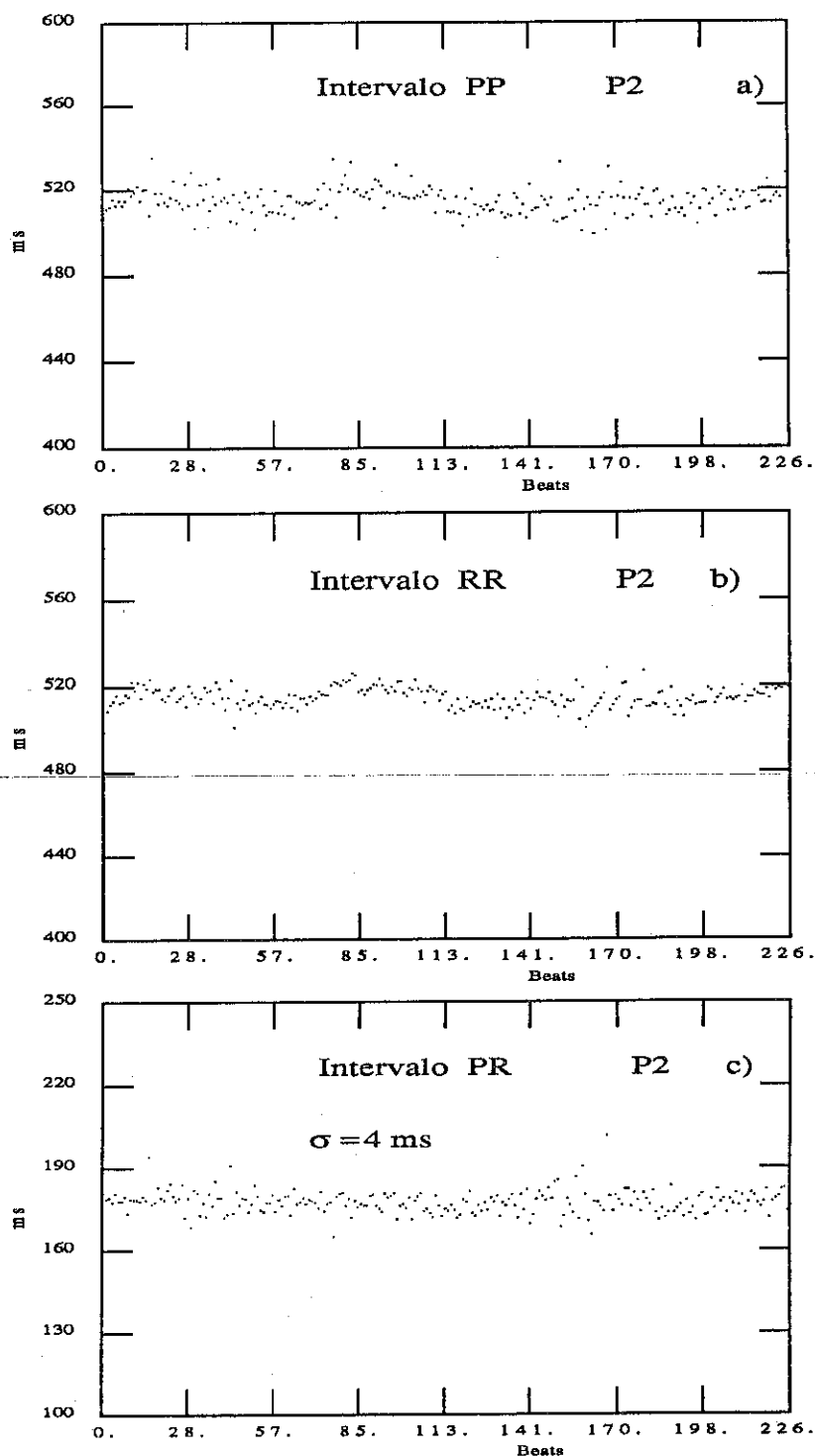


Figura 5.7: Intervalos medidos en el paciente P2.

(a) Intervalo PP en el paciente P2 medido según el método expuesto en el texto con la ecuación 5.138 en 226 latidos. (b) Intervalo RR en el mismo P2 según la ecuación 5.139. (c) Intervalo PR según la ecuación recursiva 5.141. La desviación tipo en los 226 latidos del intervalo PR es de 4 ms.

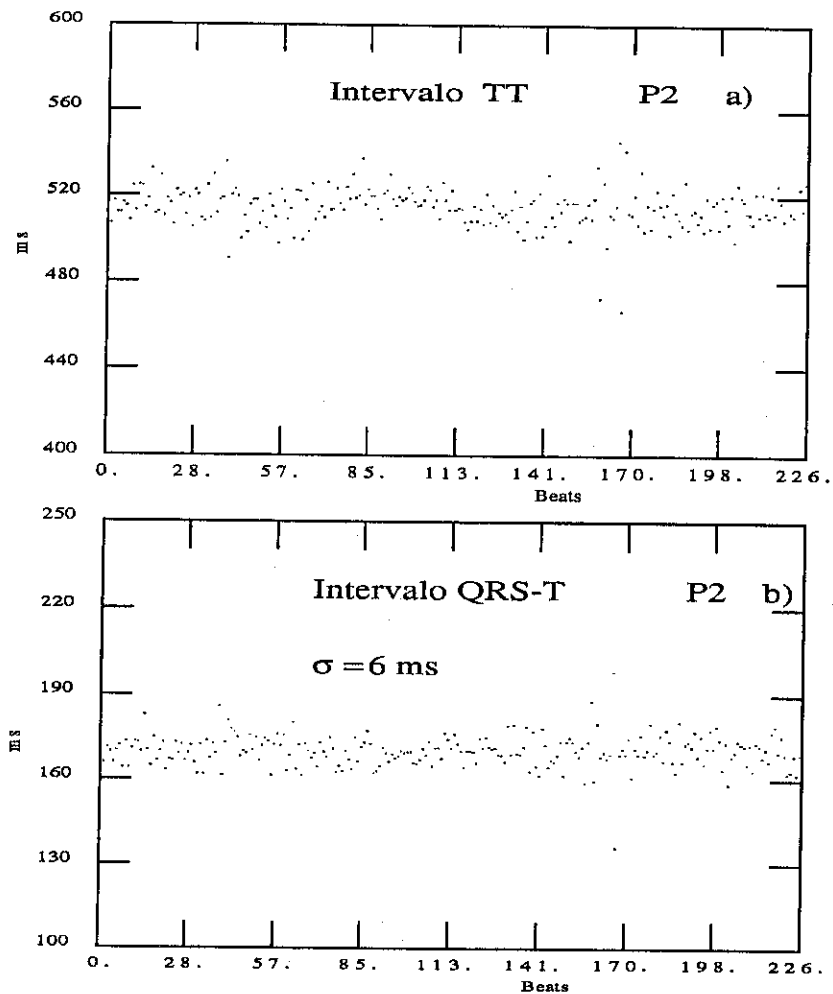


Figura 5.8: Intervalos TT y QRS-T en el paciente P2.

(a) Intervalo TT en los primeros 226 latidos del paciente P2 medido según el método expuesto en el texto con la ecuación 5.140. (b) Intervalo QRS-T en el mismo P2 según la ecuación 5.142.

5.6 Conclusiones

La exactitud en la estimación de WOT es siempre una característica importante para conocer la fiabilidad de los resultados obtenidos a partir de estos puntos o en posteriores procesados. En este capítulo se ha presentado un estudio teórico detallado de un estimador de tiempo de retardo para determinar WOT. Este estimador está basado en el cálculo de las integrales normalizadas de la señal. En presencia de ruido aditivo, blanco, Gaussiano y de media cero, se ha demostrado que el estimador \hat{D}_s , que trabaja con la señal $s(t)$, es no sesgado en una primera aproximación y su sesgo despreciable frente al valor del retardo en segunda aproximación, que considera el efecto de la finitud del intervalo de definición de la señal. El estimador \hat{D}_{s^2} , que trabaja con la señal al cuadrado $s^2(t)$, es sesgado ya en una primera aproximación, y su sesgo depende del propio retardo y de la SNR. Esta dependencia del sesgo se puede aprovechar para obtener una estimación de la SNR presente en una señal, suponiendo que el ruido que lleva asociado cumple las condiciones antes mencionadas. Esta situación se cumple con un buena grado de aproximación en las señales ECG.

La desviación tipo $\sigma_{\hat{D}_{s^2}}$ es menor que $\sigma_{\hat{D}_s}$, ello ha inducido al desarrollo de un nuevo estimador \hat{D}'_{s^2} que trabaja con la señal al cuadrado, pero que corrige el sesgo introducido por \hat{D}_{s^2} manteniendo $\sigma_{\hat{D}'_{s^2}} < \sigma_{\hat{D}_{s^2}}$. Estas características lo hacen el más adecuado para la estimación de retardos entre señales de la misma forma y, en consecuencia, para la estimación de WOT.

Los resultados en simulación presentan una buena concordancia con los deducidos teóricamente, y las expresiones derivadas pueden considerarse una buena aproximación al sesgo y la desviación tipo de estos estimadores. De este modo se puede acotar *a priori* la validez y fiabilidad de resultados posteriores. Este es el caso de promediado de señal, donde se puede predecir la frecuencia de corte del propio promediado como una función de la SNR presente en la señal (combinación de las ecuaciones 5.1 y 5.57 o 5.120). En la medida de intervalos temporales se puede estimar la precisión con que éstos son medidos, y por tanto discernir la variabilidad intrínseca de estos intervalos de la dada por la imprecisión de la medida.

Por último se ha presentado un método de medida de intervalos temporales entre ondas del ECG, tanto latido a latido (PP, RR, TT) como en cada latido (PR, QRS-T),

basado en la estimación del tiempo de retardo entre ondas consecutivas del mismo tipo. Usando el estimador analizado previamente se puede tener un conocimiento de la precisión en las medidas y por tanto a la hora de estudiar variabilidades conocer si éstas pueden ser debidas a error en la medida o a una variabilidad propiamente dicha. Con esta técnica la HRV puede evaluarse de modo más preciso a través del intervalo PP, que es el relacionado fisiológicamente con el ritmo cardiaco.

Capítulo 6

PROCESADO ADAPTATIVO DE LA SEÑAL ECG

6.1 Introducción

En los capítulos precedentes se han estudiado distintos tipos de procesados cuyo objetivo fundamental es obtener información sobre el ECG (medida de intervalos temporales, detección de complejos QRS, definición de instantes de ocurrencia,...). En todos los casos se ha visto cómo la presencia de ruido en la señal ECG, que se considera compuesta de una parte determinista más ruido aleatorio, es una limitación para la determinación de resultados precisos y fiables de los procesados realizados sobre ella. Este problema del ruido presente en la señal ECG se intenta resolver de diferentes formas, según el objetivo del procesado y las características de la señal.

Cuando lo que se pretende es reducir el nivel de ruido de la señal, la solución más comúnmente adoptada es el uso de filtros lineales cuyas características se definen en función del espectro de la señal determinista y del ruido (filtros paso alto, paso bajo, paso banda, rechazo de banda,...). En caso que el ruido tenga un espectro solapado con el de la componente determinista, ambas son afectadas de la misma forma en las componentes frecuenciales comunes. Esta situación, por otra parte muy común, es no deseable, ya que en estas componentes frecuenciales comunes no existe ningún procedimiento lineal que permita separar a la señal del ruido. Si se elimina o atenúa

el ruido, también la señal queda eliminada o atenuada en la misma proporción. Por el contrario, si se respeta la banda frecuencial de la señal determinista, siempre queda presente ruido residual que contamina la información contenida en ella.

Esta situación de componentes frecuenciales solapadas entre la señal determinista y el ruido se presenta con frecuencia en el ECG. Ya en el capítulo 3 se comentó cómo al definir el final de la onda T tenían una gran influencia las variaciones de la línea de base (generalmente de baja frecuencia respecto a las frecuencias del ECG). La onda T en su parte final presenta una débil inflexión (bajas frecuencias), que hace difícil discernir las variaciones de la línea de base de las propias de la onda T.

Los potenciales cardíacos de baja amplitud, que se encuentran ocultos en el ECG, son una parte de la componente determinista del ECG (Berbari, 1988). Los dos tipos más comunes son los potenciales ventriculares tardíos (PVT) y los generados por el haz de His-Purkinje. En ambos casos, sus componentes frecuenciales dependen del paciente, pero suelen ser algo superiores a las típicas del ECG y coinciden con las del ruido presente a esta frecuencia. Por tanto éste es otro caso donde el uso de filtros lineales no resulta adecuado para eliminar, o al menos disminuir la señal parásita.

Las situaciones anteriormente descritas son ejemplos significativos en el ECG en que existe el problema mencionado, cuando el ruido y la señal tienen componentes frecuenciales coincidentes, ambos se suelen diferenciar porque son no correlados entre sí. Por ello, las técnicas de procesamiento adaptativo de señales son una herramienta útil para separar estas dos componentes. En este capítulo se va a considerar un esquema adaptativo para procesamiento de señales, y en particular para el ECG, que se concretará en cada caso para distintas aplicaciones.

Los sistemas adaptativos, en general, tienen la propiedad de tener un comportamiento autosintonizable y variable con el tiempo, de modo que pueden automáticamente adaptarse a cambios del entorno. En el caso del procesamiento de señales, estos cambios son debidos a modificaciones en la señal, bien en la componente determinista o bien en el ruido. Esta es la característica que los hace más útiles a los sistemas adaptativos. Por contra, éstos sistemas son más complejos de tratar analíticamente que los sistemas lineales no adaptativos.

Los sistemas adaptativos pueden dividirse en sistemas en anillo abierto y en anillo

cerrado (Widrow, 1985). Los más comúnmente usados, y que presentan mejores prestaciones, son los sistemas en anillo cerrado. Estos últimos pueden, entre otros, dividirse en: anticipadores, identificadores de sistemas, ecualizadores y canceladores de interferencias. Algunos de ellos han sido ya aplicados en el procesado de la señal ECG. Así, los anticipadores se han aplicado en la detección de potenciales del haz de His-Purkinje (Al-Nashash y otros, 1988) y de potenciales ventriculares tardíos (Al-Nashash y otros, 1989). Los canceladores de interferencias han sido usados para distintas aplicaciones: eliminar las interferencias de 50 Hz generadas por la red eléctrica sobre la señal ECG (Widrow, 1985), para detectar ondas P en el ECG cancelando el complejo QRS y la onda T (Yi-Sheng y Thakor, 1987), para cancelación de interferencias debidas a un corazón donador en transplantes cardiacos (Widrow, 1985), para cancelar el ECG materno en electrocardiografía fetal (Widrow, 1985) y sin duda otras que pueden considerarse siguiendo este esquema.

6.1.1 Planteamiento del procesado adaptativo

En este capítulo se presenta un esquema adaptativo de carácter general para el procesado de señales repetitivas, sincronizadas con un evento externo o interno al sistema que las genera, y que eventualmente puedan presentar variaciones temporales en su componente determinista. El ECG es una señal que cumple las condiciones antes expuestas donde el estímulo es interno al sistema cardiovascular.

El esquema adaptativo propuesto se basa en la estructura lineal adaptativa (Widrow, 1985) con múltiples entradas de referencia y una entrada primaria que constituye la señal en estudio. Este esquema hace uso de unas entradas de referencia que son los elementos de una base del espacio vectorial en el que puede representarse la señal (Coulon, 1986).

Primeramente en el apartado 6.2 se presenta la estructura lineal adaptativa con múltiples entradas, tal como se describe en (Widrow, 1985), así como el algoritmo de mínimo error cuadrático medio (LMS) utilizado en el esquema adaptativo propuesto. En el apartado siguiente se presenta la caracterización de señales repetitivas con una base ortonormal en un espacio vectorial de funciones, y se propone y analiza la estructura lineal adaptativa con los elementos de una base como entrada de referencia. Se deducen

las expresiones matemáticas que describen el proceso en este caso, comprobándose que resultan particularmente sencillas debido a la ortonormalidad de las funciones base. En el mismo apartado se analizan los efectos sobre el comportamiento del sistema de los errores o imprecisiones en la determinación del punto de sincronismo o aparición de cada recurrencia de la señal repetitiva. Recuérdese que los estimadores de instantes de ocurrencia de las distintas ondas (en este caso se usará el complejo QRS que presenta mejor SNR) presentan errores en la determinación del WOT debidos al ruido, tal como se analizó en el capítulo 5. También se determina en el mismo apartado la mejora de la SNR al utilizar este sistema como filtro. Para ello se deduce su expresión en función de los parámetros de la adaptación.

En los apartados 6.4 y 6.5 se consideran dos aplicaciones concretas de este esquema adaptativo, presentado inicialmente de forma general, sobre la señal ECG. En 6.4 se presenta un sistema de estimación adaptativa de la forma del complejo QRS y de sus variaciones temporales (Laguna y otros, 1989b). Para ello se usan como funciones ortonormales las funciones de Hermite, que permiten representar con un número reducido de ellas (tres) alrededor del 90% de la energía del QRS (Sörnmo y otros, 1981). En este caso se considera un factor de escala variable en dichas funciones de Hermite que hace posible un seguimiento dinámico de la anchura de los QRS, ya que este factor es recalculado adaptativamente según un algoritmo propuesto. La estimación de las componentes de cada recurrencia de QRS en estas funciones puede usarse para clasificar los QRS, así como para realizar una compresión de datos del ECG si la información contenida en estos parámetros es suficientemente relevante desde un punto de vista clínico. El factor de anchura o escala puede usarse para discernir latidos ectópicos.

La segunda aplicación, que se presenta en 6.5, considera una base de funciones impulso (Jané y otros, 1990b; Jané y otros, 1990c) en el intervalo de definición de la señal. El sistema propuesto con esta base constituye un filtro adaptativo para señales vinculadas temporalmente a un estímulo. Este filtro se puede aplicar a cualquier parte de la señal y, en particular, se ha aplicado en este capítulo a la detección de PVT. Sus características son tales que resuelven el problema del espectro solapado entre la señal y el ruido, ya que elimina la señal no correlada con el impulso de sincronismo, es decir, con la señal determinista.

En ambas aplicaciones consideradas se ha realizado el estudio teórico del sistema, así como simulaciones con señales reales, obteniéndose resultados que muestran su posible utilidad clínica. Asimismo se considera la extensión de este sistema de procesado adaptativo a otras aplicaciones en el ECG u otras señales biomédicas, como son los potenciales evocados.

6.2 Estructura lineal adaptativa para procesado de señales

Un proceso adaptativo es aquél cuya estructura es alterable o ajustable, de modo que su comportamiento cambie o se adapte en función del contacto con el entorno (Widrow, 1985; Masgrau, 1986).

Los sistemas adaptativos tienen las siguientes características:

- Pueden automáticamente adaptarse frente a cambios en el entorno
- Son capaces de aprender y extrapolar su comportamiento a nuevas situaciones
- Pueden ser descritos como sistemas no lineales con parámetros variables
- Son más complejos de tratar analíticamente que los sistemas no adaptativos, pero mejoran las prestaciones cuando las características de la señal son desconocidas o variables en el tiempo

En este apartado se presenta la estructura lineal adaptativa, esquema básico para el procesado de señales digitales (en particular de la señal ECG) que se propone en este capítulo.

En la figura 6.1 se muestra la estructura lineal adaptativa. En ella se define un vector \mathbf{X}_k cuyas componentes son las señales de entrada o referencia en el instante de tiempo k :

$$\mathbf{X}_k = [X_{1k}, X_{2k}, \dots, X_{Nk}]^T \quad (6.1)$$

La señal de salida del modelo es y_k

$$y_k = \sum_{i=1}^N w_{ik} X_{ik} \quad (6.2)$$

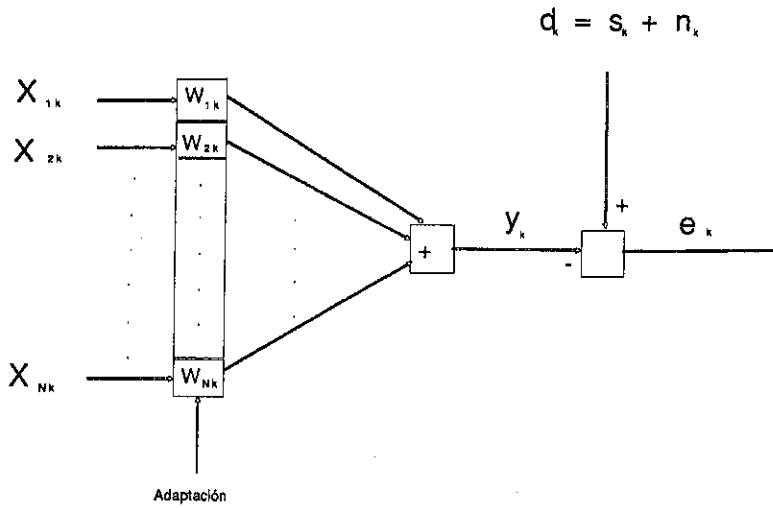


Figura 6.1: Estructura lineal adaptativa

y definiendo el vector de pesos \mathbf{W}_k como

$$\mathbf{W}_k = [w_{1k}, w_{2k}, \dots, w_{Nk}]^T \quad (6.3)$$

se puede expresar y_k como

$$y_k = \mathbf{X}_k^T \mathbf{W}_k = \mathbf{W}_k^T \mathbf{X}_k. \quad (6.4)$$

Como puede verse, el vector \mathbf{W}_k depende de cada instante de muestreo, de acuerdo con la ley de adaptación que se usará en cada caso. La señal d_k es la señal en estudio, formada por la componente determinista s_k y el ruido aleatorio n_k . El objetivo de este modelo es que la señal y_k reproduzca lo más fielmente posible a la señal determinista s_k , que contiene la información relevante. Este proceso se conoce con el nombre de aprendizaje de la señal.

La diferencia entre la señal d_k , ($d_k = s_k + n_k$) y la salida del modelo y_k es la señal de error e_k

$$e_k = s_k + n_k - y_k \quad (6.5)$$

Si n_k es no correlado con s_k y con y_k , es decir, es no correlado con cada componente X_{ik} , se puede escribir

$$\xi = E[e_k^2] = E[(s_k - y_k)^2] + E[n_k^2]. \quad (6.6)$$

Minimizar este error cuadrático medio supone hacer que las señales s_k y y_k tiendan a ser la misma, ya que $E[n_k^2]$ es una constante. Cuando $E[e_k^2]$ sea mínimo, se habrá conseguido aprender lo más posible en este modelo la función determinista s_k . Nótese que de este modo se filtra el ruido presente en la señal a estudiar, independientemente de que sus componentes espectrales sean coincidentes con las de la señal determinista o no. Sólo se ha impuesto que el ruido sea no correlado con la señal s_k y con la referencia X_k .

6.2.1 Gradiente y error cuadrático medio ξ

Reescribiendo el error e_k como

$$e_k = d_k - y_k, \quad (6.7)$$

y usando (6.4), se puede expresar el error e_k como

$$e_k = d_k - \mathbf{X}_k^T \mathbf{W}, \quad (6.8)$$

donde se ha suprimido la dependencia de \mathbf{W} con k por conveniencia, ya que en esta discusión no se desea ajustar los pesos, sino estudiar el comportamiento del error como función de \mathbf{W} .

Calculando

$$e_k^2 = d_k^2 + \mathbf{W}^T \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T \mathbf{W} - 2d_k \mathbf{X}_k^T \mathbf{W}, \quad (6.9)$$

y asumiendo que e_k , d_k y \mathbf{X}_k son estadísticamente estacionarias, se puede tomar los valores esperados, obteniéndose

$$E[e_k^2] = E[d_k^2] + \mathbf{W}^T E[\mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T] \mathbf{W} - 2E[d_k \mathbf{X}_k^T] \mathbf{W}. \quad (6.10)$$

Con el fin de simplificar la notación se define

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T] = E \begin{bmatrix} X_{1k}^2 & X_{1k}X_{2k} & \dots & X_{1k}X_{Nk} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ X_{Nk}X_{1k} & X_{Nk}X_{2k} & \dots & X_{Nk}^2 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

y

$$\mathbf{P} = E[d_k \mathbf{X}_k] = E[d_k X_{1k}, d_k X_{2k}, \dots, d_k X_{Nk}]^T. \quad (6.12)$$

Si X_{ik} y d_k son estacionarias, \mathbf{R} y \mathbf{P} son constantes. Con estas definiciones, el error cuadrático medio ξ puede expresarse como

$$\xi = E[e_k^2] = E[d_k^2] + \mathbf{W}^T \mathbf{R} \mathbf{W} - 2\mathbf{P}^T \mathbf{W}. \quad (6.13)$$

De esta expresión se deduce que ξ es una función cuadrática de \mathbf{W} que forma un hiperparaboloide con un mínimo, que será el punto a buscar por el mecanismo de adaptación. Este procedimiento deberá variar los pesos w_i , moviéndolos por el hiperparaboloide, para buscar el mínimo, que como se ha visto es el punto donde mejor aprendida está la señal determinista.

El vector \mathbf{W} que hace mínimo ξ , y que se denominará \mathbf{W}^* (Widrow, 1985), se puede obtener por el método del gradiente e igualando a cero.

$$\nabla \equiv \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{W}} = \left[\frac{\partial \xi}{\partial W_1}, \frac{\partial \xi}{\partial W_2}, \dots, \frac{\partial \xi}{\partial W_N} \right]^T. \quad (6.14)$$

Derivando (6.13) respecto a \mathbf{W}

$$\nabla \equiv 2\mathbf{R}\mathbf{W} - 2\mathbf{P} = 0. \quad (6.15)$$

De aquí se deduce que

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{P}, \quad (6.16)$$

y sustituyendo en (6.13), se tiene que el error mínimo (ξ_{min}) viene dado por

$$\xi_{min} = E[d_k^2] - \mathbf{P}^T \mathbf{W}^*. \quad (6.17)$$

Con esta expresión se puede reformular el error ξ como función de ξ_{min} y del vector de desviación de pesos $\mathbf{V} = \mathbf{W} - \mathbf{W}^*$, obteniendo la siguiente expresión de ξ

$$\xi = \xi_{min} + \mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{V}. \quad (6.18)$$

6.2.2 Efecto del ruido en el vector de pesos. El desajuste M

Si no hubiera ruido en el proceso adaptativo, y con un algoritmo de adaptación no sesgado, el vector de pesos \mathbf{W} convergería a la solución en estado estacionario \mathbf{W}^* . La

existencia de ruido en el proceso hace que \mathbf{W} varíe aleatoriamente alrededor de \mathbf{W}^* , es decir, “sube los lados” del hiperboloide del error ξ y ésto se transforma en un *exceso* de error cuadrático medio, que, de acuerdo con (6.18), se puede expresar como

$$\text{exceso } MSE = E[\xi_k - \xi_{min}] = E[\mathbf{V}_k^T \mathbf{R} \mathbf{V}_k], \quad (6.19)$$

donde ahora se retoma la dependencia de \mathbf{V} y \mathbf{W} con k , ya que ésta es la que da la variación de \mathbf{W} entorno a \mathbf{W}^* . Para cuantificar este error se define el desajuste M^1 como el cociente entre el *exceso* de error cuadrático medio (*exceso MSE*) y el error mínimo ξ_{min}

$$M = \frac{\text{exceso } MSE}{\xi_{min}}, \quad (6.20)$$

y así se puede escribir

$$\xi = \xi_{min}(1 + M). \quad (6.21)$$

6.2.3 Algoritmo de mínimo error cuadrático medio (LMS)

6.2.3.1 Definición del algoritmo LMS

Existen varios algoritmos que permiten variar el vector \mathbf{W} de modo que converja a \mathbf{W}^* . Una forma de hacerlo es según el método de la pendiente descendente (Widrow, 1975): \mathbf{W}_{k+1} es igual al vector de pesos actual más una cantidad proporcional al gradiente negativo:

$$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k - \mu \nabla_k, \quad (6.22)$$

donde el parámetro μ es un factor que controla la estabilidad y velocidad de convergencia del algoritmo.

¹En inglés "Misadjustment"

El gradiente ∇_k tiene la expresión

$$\nabla_k = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial E[e_k^2]}{\partial W_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial E[e_k^2]}{\partial W_N} \end{array} \right\}_{\mathbf{W}=\mathbf{W}_k}, \quad (6.23)$$

y el algoritmo de mínimo error cuadrático medio (LMS) considera la aproximación siguiente ($\hat{\nabla}_k$) al gradiente ∇_k :

$$\hat{\nabla}_k = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial e_k^2}{\partial W_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial e_k^2}{\partial W_N} \end{array} \right\}_{\mathbf{W}=\mathbf{W}_k} = 2e_k \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial e_k}{\partial W_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial e_k}{\partial W_N} \end{array} \right\}_{\mathbf{W}=\mathbf{W}_k}, \quad (6.24)$$

y usando (6.8) se obtiene que

$$\hat{\nabla}_k = -2e_k \mathbf{X}_k. \quad (6.25)$$

Sustituyendo ahora en (6.22) se obtiene la expresión recurrente que define el algoritmo LMS:

$$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k + 2\mu e_k \mathbf{X}_k \quad (6.26)$$

6.2.3.2 Convergencia del algoritmo LMS

El algoritmo LMS usa una estimación del gradiente real ∇_k que es $\hat{\nabla}_k$. Esta estimación es no sesgada, dado que si se fija la atención en un punto del hiperparaboloide donde \mathbf{W} es constante, se puede escribir

$$E[\hat{\nabla}_k] = -2E[e_k \mathbf{X}_k] = -2E[d_k \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T \mathbf{W}], \quad (6.27)$$

y considerando las definiciones de \mathbf{P} y \mathbf{R} , y la ecuación (6.15) resulta

$$E[\hat{\nabla}_k] = 2(\mathbf{R}\mathbf{W} - \mathbf{P}) = \nabla. \quad (6.28)$$

Es decir, el estimador del gradiente usado en el LMS es no sesgado. Para asegurar el cumplimiento de esta propiedad se debería estimar ∇ en cada iteración, pero sin adaptar los pesos w_i hasta transcurrido un número suficientemente grande de iteraciones.

Sin embargo, el algoritmo LMS adapta los pesos w_i en cada iteración, y por ello se ha de estudiar la convergencia de diferente modo. Si se toma el valor esperado en ambos lados de la relación de recurrencia del algoritmo LMS (ecuación 6.26), se tiene

$$E[\mathbf{W}_{k+1}] = E[\mathbf{W}_k] + 2\mu E[e_k \mathbf{X}_k], \quad (6.29)$$

y de (6.8)

$$E[\mathbf{W}_{k+1}] = E[\mathbf{W}_k] + 2\mu(E[d_k \mathbf{X}_k] - E[\mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T \mathbf{W}_k]). \quad (6.30)$$

Suponiendo que \mathbf{X}_k y \mathbf{W}_k son independientes y usando \mathbf{W}^* , se puede escribir

$$E[\mathbf{W}_{k+1}] = E[\mathbf{W}_k] + 2\mu(\mathbf{P} - \mathbf{R}E[\mathbf{W}_k]) \quad (6.31)$$

$$E[\mathbf{W}_{k+1}] = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R})E[\mathbf{W}_k] + 2\mu\mathbf{R}\mathbf{W}^*, \quad (6.32)$$

y expresando esta ecuación en función de \mathbf{V} , resulta

$$E[\mathbf{V}_k] = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R})^k \mathbf{V}_0, \quad (6.33)$$

donde \mathbf{V}_0 es el vector \mathbf{V} en el instante inicial $k = 0$. Para que esta solución converja se debe de cumplir que

$$-1 < 1 - 2\mu\lambda_i < 1, \quad (6.34)$$

donde λ_i son los valores propios de la matriz \mathbf{R} . Esto se traduce en una condición de convergencia para μ :

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{max}}, \quad (6.35)$$

donde λ_{max} es el mayor valor propio de la matriz \mathbf{R} . Esta condición hace que \mathbf{W} converja, pero para que el vector de pesos lo haga en módulo, es decir, no realice oscilaciones, la condición es algo más restrictiva (Feuer, 1985)

$$0 < \mu < \frac{1}{3tr[\mathbf{R}]}, \quad (6.36)$$

donde $tr[\mathbf{R}]$ es la traza de la matriz \mathbf{R} .

El tiempo de convergencia de este proceso de adaptación exponencial para el peso w_i puede calcularse haciendo

$$(1 - 2\mu\lambda_i)^k = e^{\frac{-k}{\tau_i}}, \quad (6.37)$$

y si $2\mu\lambda_i \ll 1$ (condición que suele cumplirse, ya que es el valor límite de μ para que el algoritmo converja), τ_i puede aproximarse por

$$\tau_i \simeq \frac{1}{2\mu\lambda_i}. \quad (6.38)$$

El tiempo de convergencia para el error cuadrático medio asociado a cada peso i (τ_{mse_i}) es la mitad, ya que, de acuerdo con (6.18), ξ depende de V al cuadrado

$$\tau_{mse_i} = \frac{1}{4\mu\lambda_i}. \quad (6.39)$$

El tiempo total de convergencia (τ_{mse}) puede aproximarse (Widrow, 1975) por

$$\tau_{mse} = \frac{N}{4\mu \operatorname{tr}[\mathbf{R}]}, \quad (6.40)$$

donde N es el número de pesos. De este modo se considera un promedio de los valores propios de la matriz \mathbf{R} . Las unidades de estos tiempos de convergencia están expresadas en periodos de muestreo, ya que el LMS realiza una adaptación en cada uno de ellos. En otros algoritmos donde ésto no ocurre hay que multiplicar este tiempo por el número de periodos de muestreo que comporta cada adaptación.

6.2.3.3 Desajuste del algoritmo LMS

En el caso del LMS, el *exceso* de MSE puede expresarse (Widrow, 1985) como

$$\text{exceso MSE} = \mu \xi_{\min} \operatorname{tr}[\mathbf{R}], \quad (6.41)$$

y entonces el desajuste M viene expresado según (6.20) como

$$M = \mu \operatorname{tr}[\mathbf{R}], \quad (6.42)$$

y el error total ξ , según (6.21) queda

$$\xi = \xi_{\min}(1 + \mu \operatorname{tr}[\mathbf{R}]). \quad (6.43)$$

De todo este desarrollo se deduce que debe establecerse un compromiso al seleccionar el valor de μ en el algoritmo de adaptación. Un μ grande crea un M grande (6.42), y por tanto, aumenta el error en estado estacionario; por el contrario, un μ pequeño da un tiempo de convergencia grande (6.40), que en ocasiones puede no ser deseable.

En este apartado se ha estudiado la expresión del modelo de adaptación lineal con el algoritmo LMS, que es el más usado dada su simplicidad de cálculo y de realización. En el siguiente apartado se considerará ya unas entradas de referencia concretas y se analizará el comportamiento de este esquema y su utilidad para procesar la señal ECG.

6.3 Caracterización adaptativa de señales mediante una base ortonormal

En este apartado se considera el formalismo de espacios vectoriales como forma de representar y estudiar las señales. Así, una señal queda especificada de forma unívoca por los coeficientes que la representan en una determinada base. Haciendo uso de este formalismo, se propone un sistema adaptativo de estimación de los coeficientes que describen a una señal repetitiva, pero que puede presentar variaciones temporales. El esquema adaptativo de estimación permitirá recoger estas variaciones caracterizando dinámicamente la señal.

6.3.1 Caracterización de señales mediante una base ortonormal

A partir de este momento, cuando se haga referencia a señales se hará pensando en aquéllas que constan de una componente determinista y de una aleatoria, que se le denominará ruido.

El formalismo de funciones ortonormales es análogo al usado en un espacio vectorial con una base ortonormal (Coulom, 1986; Lynn, 1982; Ahmed y Rao, 1975). En un espacio vectorial existe definido un producto escalar, y dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es nulo. Normalizando estos vectores ortogonales se puede conseguir un conjunto de ellos, tantos como sea la dimensión del espacio (L), $\{V_n\}$ $n = 1, 2, \dots, L$, que forme una base. Esto es, cualquier vector V de ese espacio se puede generar con una combinación lineal de los elementos de la base $V = \sum_{i=1}^L c_i V_i$, donde $c_i = \langle V V_i \rangle$ es el producto escalar de V con V_i . Esta combinación lineal, además, es única, de modo que los coeficientes $\{c_i\}$ $i = 1, \dots, L$ describen de forma unívoca al vector que generan.

Todo este formalismo, bien conocido del álgebra de espacios vectoriales, puede ser usado para la descripción de señales, en tanto que éstas se pueden representar por funciones matemáticas reales que forman un espacio vectorial. El producto escalar entre dos funciones $s_1(t)$ y $s_2(t)$ viene definido como

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \int_a^b s_1(t) s_2(t) dt, \quad (6.44)$$

donde a y b son los límites de existencia de las funciones $s_1(t)$ y $s_2(t)$. Estos límites en la forma más general son $a = -\infty$ y $b = +\infty$. Obviamente, la condición que deben cumplir estas funciones es que su integral esté definida, pero esto ocurre siempre en funciones que representan a señales físicas reales.

En el caso más general, el espacio vectorial de funciones tiene dimensión infinita no numerable, por tanto los elementos de una base serán un conjunto de funciones ortonormales infinito y no numerable. Esta base $\{b_p(t)\}$ se puede representar por un conjunto de funciones con un índice continuo p , donde $p \in R$ y varía desde $-\infty$ a $+\infty$. De acuerdo con ello, cualquier función $s(t)$ podrá ser expresada como una suma infinita (integral) de los elementos de la base multiplicados por un coeficiente

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c_p b_p(t) dp, \quad (6.45)$$

con

$$c_p = \int_{-\infty}^{\infty} b_p(t) s(t) dt. \quad (6.46)$$

El conocimiento de c_p determina de forma unívoca la señal $s(t)$ en consideración.

Una aproximación más realista es que la señal sea continua, pero esté acotada en un intervalo (a, b) . En este caso, los límites de la integral pasan a ser a y b , y los elementos de la base se convierten en numerables:

$$s(t) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} c_p b_p(t) dp, \quad (6.47)$$

y

$$c_p = \int_a^b b_p(t) s(t) dt. \quad (6.48)$$

El número de elementos de la base sigue siendo infinito pero numerable $p \in Z$.

Un ejemplo típico de base son las funciones seno y coseno, siendo su índice la frecuencia w

$$b_w(t) = A \exp(jwt), \quad (6.49)$$

de modo que si la señal se extiende de $-\infty$ a $+\infty$, su espectro $c_w = C(w)$ es continuo y describe unívocamente la señal. $C(w)$ es la transformada de Fourier, es decir, la descomposición de la señal en la base $b_w(t)$ de senos y cosenos. Cuando la señal está acotada en un intervalo (a, b) se la puede suponer extendida al intervalo $(-\infty, +\infty)$

sin más que considerar la señal repetida periódicamente a intervalos (a, b) . En este caso, las funciones base en senos y cosenos han de tener la misma periodicidad que la función, existiendo únicamente componentes múltiplos de la frecuencia fundamental (f_0) , esto es: $\omega/2\pi = f = nf_0$ con $n \in Z$ y $f_0 = \frac{1}{T_p}$, donde T_p es la distancia temporal del intervalo (a, b) . La base

$$b_w(t) = b_{2\pi n f_0}(t) \quad (6.50)$$

es una base numerable infinita, y la descomposición en series de Fourier $(C(2\pi n f_0))$ describe la señal en este caso.

En ocasiones, la mayor parte de la información se encuentra representada por un número finito de coeficientes o, en el caso de que éstos sean no numerables, por los coeficientes dentro de un intervalo de variación finito del índice p . Esto es importante desde el punto de vista de compactar la información sin tener una pérdida de ésta significativa. Una adecuada elección de la base puede hacer que la información se concentre más en torno a unos coeficientes que a otros. Este es un criterio importante a considerar cuando se elige la base.

Todo el tratamiento expuesto hasta este punto se refiere a señales continuas, periódicas o no. Este formalismo se ve modificado cuando las señales son digitalizadas y, por tanto, se convierten en discretas en el tiempo. Las funciones base, lógicamente, deberán ser también discretas en el tiempo. Centrando la atención en el caso de funciones $s(t)$ definidas en un intervalo, éstas se han reducido a un conjunto finito de valores en determinados instantes de tiempo $s(nT)$ $n = 1, \dots, L$, donde T es el periodo de muestreo de la señal y n un entero que recorre el intervalo de definición de ésta. Dado que ahora la información está contenida en un conjunto finito de valores, ya se puede suponer que el número de elementos de la base, o dimensión del espacio vectorial, no puede ser infinito. De hecho, el número de elementos de la base $b_p(t)$ es el mismo que el de instantes de muestreo en los que está dividido el intervalo de definición, ya que éste es el número de valores independientes que se tienen $(T_p/T = L)$. Esto se constata en la base $b_w(t)$ antes mencionada, donde por el hecho de muestrear aparece una periodicidad en el espectro $C(2\pi n f_0) = C\left(2\pi \left(n + m \frac{T_p}{T}\right) f_0\right)$. Esto quiere decir que se tienen $\frac{T_p}{T}$ valores independientes.

De acuerdo con el teorema del muestreo, la periodicidad del espectro de una señal muestreada está determinada por la frecuencia de muestreo $f_c = \frac{1}{T}$; por tanto, el número

de coeficientes $C(2\pi n f_0)$ independientes será desde $n_1 f_0 = -\frac{f_c}{2}$ hasta $n_2 f_0 = \frac{f_c}{2}$. Despejando se obtiene que $n_1 = -\frac{f_c}{2f_0} = -\frac{T_p}{2T}$ y $n_2 = \frac{T_p}{2T}$, sumando $|n_1| + |n_2| = \frac{T_p}{T}$ coeficientes independientes, lo cual está de acuerdo con lo expresado de forma general. Siempre se deberá tener presente que al muestrear una señal, y para no introducir errores, la frecuencia de muestreo f_c deberá ser al menos mayor o igual que el doble de la frecuencia más alta que contenga la señal f_{max} , $f_c \geq 2f_{max}$. Este resultado se conoce como el teorema del muestreo o de Shannon (Coulom, 1986).

Mediante este proceso, la información de la señal está contenida en unos coeficientes a través de una base. Esto puede ser importante si las componentes en ciertos elementos de la base tienen más significado que en otros y de este modo se puede separar la información. En otros casos puede ocurrir que la mayor parte de la información se encuentre en un reducido número de componentes respecto al número de valores de la señal discretizada, y de este modo se concentra la información.

6.3.2 Planteamiento del procesado adaptativo

Muchas señales presentan un comportamiento periódico o casi periódico. Otras veces se presentan señales de forma repetitiva, pero a intervalos de tiempo no periódicos, y cuya secuencia está controlada por un fenómeno externo o interno que desencadena la aparición de la señal (en particular la señal ECG cumplirá estas condiciones). En estos casos es de gran utilidad contar con un seguimiento o caracterización de la señal a lo largo de sus diferentes apariciones (recurrencias), lo que permite estudiar sus características, y su variación en el tiempo.

Para ello se usará el modelo adaptativo descrito en el apartado 6.2. La señal se la supondrá definida durante un tiempo L medido en periodos de muestreo. Con cada recurrencia de esta señal se disparará el mecanismo de adaptación. La definición de este instante de ocurrencia se realiza bien por un detector previo de presencia de señal, bien por la existencia de un sincronismo externo a la señal que define los instantes de aparición. En el esquema adaptativo considerado se supondrá que:

- Se puede obtener previamente el tiempo de ocurrencia
- Los instantes de ocurrencia están lo suficientemente separados para que las

realizaciones consecutivas no se solapen en el tiempo

La primera condición define el instante de inicio de adaptación que se extenderá un tiempo L , para después pararse hasta que aparezca una nueva realización. La segunda asegura que no se tienen realizaciones con mezcla de la señal determinista de una realización más parte de otra retardada un tiempo menor que L . En caso contrario se generarían errores, ya que la señal que se estimaría sería la suma de estas contribuciones.

Con estas consideraciones se pasará a describir el modelo adaptativo particularizado, usando como entrada de referencia los elementos de una base.

6.3.3 La base ortonormal como entrada de referencia

Haciendo uso del modelo adaptativo descrito en el apartado 6.2 y con el algoritmo LMS se tiene el esquema mostrado en la figura 6.2.

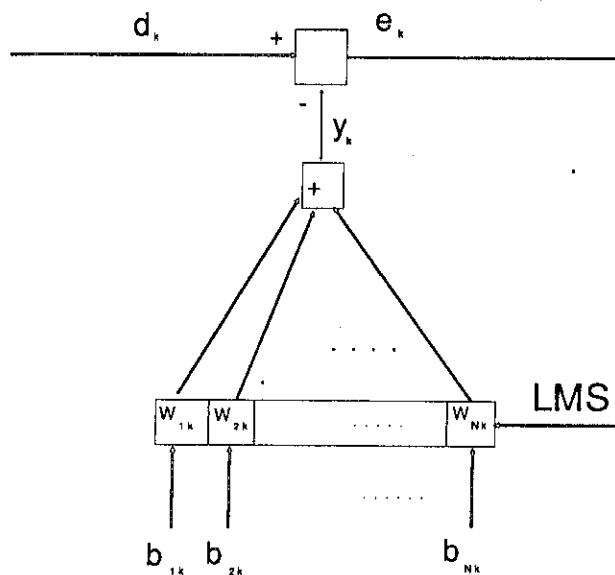


Figura 6.2: Esquema de procesamiento adaptativo usando la estructura lineal adaptativa

En este caso las señales de entrada X_{ik} son las funciones base b_{ik} , definidas en el mismo intervalo L que la señal d_k , y repetidas de forma periódica tantas veces como

recurrencias de la señal d_k aparezcan. Estas funciones b_{ik} cumplen que

$$\sum_{k=1}^L b_{ik} b_{jk} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \quad (6.51)$$

y por tanto

$$E[b_{ik} b_{jk}] = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L b_{ik} b_{jk} = \begin{cases} 1/L & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}. \quad (6.52)$$

La señal d_k vale

$$d_k = s_k + n_k, \quad (6.53)$$

y dado que el número de elementos de la base es L se puede escribir

$$d_k = \sum_{i=1}^L c_i b_{ik} + n_k, \quad (6.54)$$

donde c_i son las componentes deterministas de la señal d_k (s_k) en la base b_{ik} , y n_k es ruido, que se supondrá no correlado ni con la señal ni con las funciones de la base, y por tanto se podrá escribir

$$E[d_k^2] = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L c_i^2 + E[n_k^2]. \quad (6.55)$$

El número de funciones de la base considerado (N) en la entrada de referencia puede ser menor que L . Cuando N sea igual a L , toda la señal s_k podrá ser caracterizada. Si $N < L$ sólo ciertos elementos de la base se considerarán, y por tanto se podrá estimar sólo las componentes de la señal en la funciones b_{ik} $i = 1, \dots, N$. La señal estimada y_k valdrá

$$y_k = \sum_{i=1}^N w_{ik} b_{ik}. \quad (6.56)$$

Como se ha visto, este esquema tiende a minimizar el error entre s_k y y_k . Dado que b_{ik} son independientes, por ser elementos de una base, entonces los valores w_i^* serán las componentes de la señal s_k en b_{ik} , y por tanto éstas quedan unívocamente caracterizadas por cada w_i^* . Una estimación de w_i^* se obtiene mediante w_i .

6.3.4 Expresiones de adaptación con una base ortonormal

Al analizar el comportamiento del modelo adaptativo con funciones ortonormales como entradas de referencia (6.52), se ve que la matriz \mathbf{R} definida en la sección 6.2 vale

$$\mathbf{R} = \frac{1}{L} \mathbf{I}, \quad (6.57)$$

donde L es el intervalo de definición de la señal y por tanto de la base. Esto es una consecuencia inmediata de la ortonormalidad de las funciones b_{ik} . La traza de la matriz \mathbf{R} vale en este caso

$$\text{tr}[\mathbf{R}] = \frac{N}{L}. \quad (6.58)$$

sus valores propios

$$\lambda_i = \frac{1}{L}. \quad (6.59)$$

El desajuste M se expresa como

$$M = \mu \text{tr}[\mathbf{R}] = \mu \frac{N}{L}. \quad (6.60)$$

La condición de convergencia más restrictiva queda

$$0 < \mu < \frac{L}{3N}. \quad (6.61)$$

Y el tiempo de convergencia del error cuadrático medio valdrá

$$\tau_{mse} = \frac{L}{4\mu}. \quad (6.62)$$

En este caso, y dependiendo de μ , se puede obtener $\tau_{mse} < L$, lo cual indica que el algoritmo es capaz de converger en la primera iteración o recurrencia de la señal. Por tanto, si la señal presenta cambios de una realización a otra (no estacionariedad), éstos serán recogidos en el vector de pesos \mathbf{W} al final del proceso de adaptación en cada recurrencia. La evolución de los pesos después de cada realización será una medida de la evolución de la señal, que es el objetivo que se persigue con este planteamiento.

El vector \mathbf{P} definido en (6.12), y considerando que X_{ik} son elementos de una base ($E[d_k X_{ik}] = \frac{1}{L} c_i$), es

$$\mathbf{P} = \frac{1}{L} [c_1, c_2, \dots, c_N]^T, \quad (6.63)$$

y por tanto el vector $\mathbf{W}^* = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{P}$ vale

$$\mathbf{W}^* = [c_1, c_2, \dots, c_N]^T, \quad (6.64)$$

es decir, se comprueba que las componentes del vector \mathbf{W}^* son las componentes de s_k en la base b_{ik} . En la situación de mínimo error cuadrático medio (ξ_{min})

$$y_k = \sum_{i=1}^N w_i^* b_{ik} = \sum_{i=1}^N c_i b_{ik}, \quad (6.65)$$

es decir, y_k es la componente determinista de s_k representada por las funciones base consideradas. Si $N = L$ (se toma toda la base), entonces

$$y_k = \sum_{i=1}^L c_i b_{ik} = s_k \quad (6.66)$$

y la señal de salida del sistema y_k es directamente la componente determinista a estimar s_k .

En cuanto al error mínimo, se ha visto que éste podía ser expresado según (6.17) como

$$\xi_{min} = E[d_k^2] - \mathbf{P}^T \mathbf{W}^* \quad (6.67)$$

En este caso

$$\mathbf{P}^T \mathbf{W}^* = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N c_i^2 \quad (6.68)$$

y

$$E[d_k^2] = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L c_i^2 + \sigma^2, \quad (6.69)$$

donde σ^2 es el valor cuadrático medio del ruido n_k , supuesto estacionario ($E[n_k^2] = \sigma^2$).

Sustituyendo en la expresión del error (6.67), se obtiene

$$\xi_{min} = \frac{1}{L} \sum_{i=N+1}^L c_i^2 + \sigma^2, \quad (6.70)$$

donde se ve que el mínimo error corresponde al ruido y a la parte de la señal que no puede ser representada con los elementos de la base considerados ($i = N+1, \dots, L$). Como el error total ξ en estado estacionario se puede expresar en función de ξ_{min} y de M , se tiene que

$$\xi = \xi_{min}(1 + M) = \left(1 + \frac{\mu N}{L}\right) \left(\frac{1}{L} \sum_{i=N+1}^L c_i^2 + \sigma^2\right). \quad (6.71)$$

En esta expresión del error total puede observarse que si bien es importante aumentar N para de este modo reducir el sumatorio $\sum_{i=N+1}^L c_i^2$, también es contraproducente, dado que el término $\left(1 + \frac{\mu N}{L}\right)$ crece. La situación ideal no es aquella que presenta la base completa como vector de referencia, sino aquella que minimiza ξ . Esto se puede calcular derivando ξ respecto a un incremento de un elemento de la base e igualando a cero. El resultado depende de las componentes de la señal c_i , que son desconocidas *a priori* y pueden variar en el tiempo.

En cualquier caso, lo que sí resulta evidente inspeccionando la expresión de ξ es que conviene elegir la base de modo que la mayor parte de la energía de la señal esté representada en un número reducido de elementos (N). Así, aunque N sea pequeño, la energía de la señal sin representar ($\sum_{i=N+1}^L c_i^2$) también lo será, aunque se extienda a un número elevado de componentes. Procediendo de esta forma se consigue que los términos que afectan al error en la estimación sean minimizados. La base óptima con este criterio es la que se deriva de calcular la transformada de Karhunen-Loève (KL) (Ahmed y Rao, 1975). En este caso la señal es representada con el mínimo error cuadrático medio, pero los elementos de la base habrían de ser calculados en cada recurrencia de la señal, o bien realizar una estimación en las primeras recurrencias y después tomarlos como constantes.

Cuando toda la base actúe como entrada de referencia y $N = L$, el error resultante, de 6.71, valdrá

$$\xi = (1 + \mu)\sigma^2 = (1 + \mu)E[n_k^2]. \quad (6.72)$$

6.3.5 Efecto de los errores en el punto de sincronismo

En todo el desarrollo anterior se ha supuesto que se cuenta con una precisa definición del punto de sincronismo. Esto en ocasiones es así, pero en otras existe una cierta imprecisión. Este error es debido a las propias técnicas de definición, sobre todo cuando éstas actúan sobre la propia señal que está contaminada con ruido.

Para analizar este efecto se supondrá que se está en la situación ideal de estado estacionario donde el vector de pesos ha convergido a \mathbf{W}^* , y en un momento se desencadena una recurrencia de adaptación retardada una cantidad δ .

Si d_k es la señal a estimar y la señal estimada y_k está retardada respecto de d_k

$$y_k = \mathbf{W}^{*T} \mathbf{X}_{(k \pm \delta)}. \quad (6.73)$$

El error será

$$e_k = d_k - y_k = d_k - \mathbf{W}^{*T} \mathbf{X}_{(k \pm \delta)}, \quad (6.74)$$

y tomando el valor esperado del cuadrado del error

$$\xi = E[e_k^2] = E[d_k^2] + \mathbf{W}^{*T} \mathbf{R} \mathbf{W}^* - 2E[d_k \mathbf{W}^{*T} \mathbf{X}_{(k \pm \delta)}]. \quad (6.75)$$

Usando (6.17) se puede escribir

$$\xi = \xi_{min} + 2(E[d_k \mathbf{W}^{*T} \mathbf{X}_k] - E[d_k \mathbf{W}^{*T} \mathbf{X}_{(k\pm\delta)}]) \quad (6.76)$$

$$\xi = \xi_{min} + 2\mathbf{W}^{*T}(\mathbf{P} - \mathbf{P}_\delta) \quad (6.77)$$

donde

$$\mathbf{P}_\delta = E[d_k \mathbf{X}_{(k\pm\delta)}]. \quad (6.78)$$

Cuando $\delta = 0$ entonces $\mathbf{P}_\delta = \mathbf{P}$ y $\xi = \xi_{min}$, es decir, se está en el caso ideal de sincronización perfecta.

Por consiguiente, la imprecisión en el punto de sincronismo incrementa el error en estado estacionario en una cantidad que depende de la señal a través de \mathbf{P} y de \mathbf{W}^* . Se puede comprobar que $\mathbf{W}^{*T} \mathbf{P}_\delta$ es la función de correlación de la parte de señal determinista correlada con \mathbf{X}_k (s_k^*), o proyección de la señal en el subespacio definido por \mathbf{X}_k , con la propia señal s_k retardada una distancia temporal δ , ya que

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{*T} \mathbf{P}_\delta &= E[d_k \mathbf{W}^{*T} \mathbf{X}_{k\pm\delta}] \\ &= E[d_k \sum_{i=1}^N c_i \mathbf{X}_{i(k\pm\delta)}] \\ &= E[d_k s_{k\pm\delta}^*] \\ &= E[s_k s_{k\pm\delta}^*]. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Y si se denota a la función de correlación $E[s_k s_{k\pm\delta}^*]$ por

$$\phi_s^*(\delta) = E[s_k s_{(k\pm\delta)}^*] \quad (6.80)$$

se puede escribir

$$\xi = \xi_{min} + 2\{\phi_s^*(0) - \phi_s^*(\delta)\}. \quad (6.81)$$

Por otra parte, sustituyendo en (6.77) y de (6.68), se puede escribir

$$\xi = \xi_{min} + 2\left\{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^N c_i^2 - \phi_s^*(\delta)\right\}. \quad (6.82)$$

En el caso en que $\delta = 0$ es claro que $\phi_s^*(0) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N c_i^2$ y el error se reduce a ξ_{min} , ya calculado anteriormente.

En este estudio se ha supuesto que los pesos están en el punto de mínimo error (\mathbf{W}^*). Si se realiza el mismo estudio pero con \mathbf{W}_k en estado estacionario, en lugar de \mathbf{W}^* , se llega a la expresión para el error ξ :

$$\xi = \xi_{min}(1 + M) + 2 \left(E[d_k \mathbf{W}_k^T \mathbf{X}_k] - E[d_k \mathbf{W}_k^T \mathbf{X}_{(k \pm \delta)}] \right). \quad (6.83)$$

Si se calcula el valor de $E[d_k \mathbf{W}_k^T \mathbf{X}_k]$ y teniendo en cuenta que \mathbf{X}_k y \mathbf{W}_k son no correlados entre si, resulta

$$E[d_k \mathbf{W}_k^T \mathbf{X}_k] = E[\mathbf{W}_k^T] \mathbf{P} = \mathbf{W}^* \mathbf{P}, \quad (6.84)$$

es decir, se reproduce la misma situación anterior y entonces

$$\xi = \xi_{min}(1 + M) + 2 \mathbf{W}^* (\mathbf{P} - \mathbf{P}_\delta), \quad (6.85)$$

por tanto, el error ξ vale

$$\xi = \xi_{min}(1 + M) + 2 \left\{ \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N c_i^2 - \phi_s^*(\delta) \right\}. \quad (6.86)$$

Esta expresión permite deducir que la existencia de una imprecisión en la definición del punto de sincronismo ocasiona un nuevo término aditivo en el error cuadrático medio en estado estacionario. Esta contribución depende de la propia señal en estudio y por tanto su valor relativo deberá ser analizado en cada caso.

6.3.6 Mejora de la relación señal-ruido (SNR)

El planteamiento del procesado adaptativo realizado en esta sección pretende obtener una estimación de la señal determinista s_k que se encuentra inmersa en ruido n_k . Se ha comprobado que, en el caso de mínimo error cuadrático medio, los pesos w_i^* coinciden con las componentes c_i de s_k en la base b_{ik} (sección 6.3.4). Sin embargo, la situación en estado estacionario es tal que existe un error algo superior al mínimo debido al desajuste M . Esto hace que la estimación de los c_i mediante los pesos w_i no sea exacta y se tenga un exceso de error cuadrático medio, que en caso de sincronización perfecta vale $\xi = \xi_{min}(1 + M)$.

Se puede plantear ahora el cálculo de la relación señal-ruido a la salida del sistema adaptativo y_k en estado estacionario. Para ello se define primero la SNR en la señal

de entrada d_k (SNR_d) como

$$SNR_d = \frac{E[s_k^2]}{E[n_k^2]} = \frac{E[s_k^2]}{\sigma^2}, \quad (6.87)$$

es decir, es la relación entre la energía de la señal determinista y la energía del ruido.

La señal de salida y_k puede expresarse como

$$y_k = s_k + (y_k - s_k), \quad (6.88)$$

y de este modo se ve que s_k es la parte que se pretende sea representada por y_k , y el resto $(y_k - s_k)$ representa al ruido que todavía se tiene a la salida. Por ello se define la SNR de la señal de salida en estado estacionario como

$$SNR_y^{ss} = \frac{E[s_k^2]}{E[(y_k - s_k)^2]}. \quad (6.89)$$

Para calcular la mejora de la SNR_y^{ss} a la salida del sistema adaptativo se calcula el valor de la expresión de $E[(y_k - s_k)^2]$. De la ecuación 6.6 se observa que $E[(y_k - s_k)^2]$ puede expresarse como:

$$E[(y_k - s_k)^2] = \xi - E[n_k^2], \quad (6.90)$$

y de 6.71, en estado estacionario

$$E[(y_k - s_k)^2] = \left(1 + \frac{\mu N}{L}\right) \left(\frac{1}{L} \sum_{i=N+1}^L c_i^2 + \sigma^2\right) - \sigma^2. \quad (6.91)$$

Sustituyendo en la expresión de SNR_y^{ss} se tiene

$$SNR_y^{ss} = \frac{E[s_k^2]}{\left(1 + \frac{\mu N}{L}\right) \left(\frac{1}{L} \sum_{i=N+1}^L c_i^2 + \frac{\mu N}{L} \sigma^2\right)}, \quad (6.92)$$

y expresando esta relación en función de la SNR_d

$$SNR_y^{ss} = \frac{SNR_d}{\frac{\left(1 + \frac{\mu N}{L}\right)}{\sigma^2} \left(\frac{1}{L} \sum_{i=N+1}^L c_i^2\right) + \frac{\mu N}{L}}. \quad (6.93)$$

Es decir, la SNR_y^{ss} depende de la SNR a la entrada. Este resultado es perfectamente intuitivo, en el sentido de que cuanto mejores sean las condiciones de la señal a la entrada mejores lo serán las de la señal procesada. Por otro lado, la mejora de la SNR será tanto mayor cuanto menor sea la energía de la señal determinista s_k que se queda

sin representar en el modelo elegido ($\sum_{i=N+1}^L c_i^2$), es decir, cuanto mejor represente el modelo a la señal s_k , resultado éste que, por otra parte, también resulta intuitivo. La dependencia de la mejora de la SNR con el sistema adaptativo viene dada a través del parámetro μ : un μ pequeño supone una mayor mejora de la SNR_y y al contrario, un μ grande supone una menor mejora de SNR_y . Nuevamente aparece el compromiso al elegir este parámetro, como ya se discutió al estudiar el desajuste M , ya que un μ grande supone un tiempo de convergencia pequeño y una pobre mejora de la SNR. Su elección, por tanto, depende de las características de la señal de entrada (SNR_d , estacionariedad,...) y de los resultados que se pretenden obtener.

La mejora de la SNR en estado estacionario (ΔSNR^{ss}) se puede expresar como

$$\Delta SNR^{ss} = \frac{SNR_y^{ss}}{SNR_d} = \frac{1}{\frac{(1+\frac{\mu N}{L})}{\sigma^2} \left(\frac{1}{L} \sum_{i=N+1}^L c_i^2 \right) + \frac{\mu N}{L}} \quad (6.94)$$

Un caso particular, más interesante desde el punto de vista del filtrado de señales y que se discutirá en detalle en un ejemplo en el apartado 6.5, es el correspondiente a que los elementos de la base representen toda la señal determinista. En este caso $\sum_{i=N+1}^L c_i^2 = 0$ y ΔSNR^{ss} se convierte en

$$\Delta SNR^{ss} = \frac{L}{N\mu} = \frac{1}{M} \quad (6.95)$$

Lo deseable ahora para obtener una ΔSNR^{ss} grande es que N sea pequeño. Esto supondrá que la señal determinista s_k pudiera representarse con total precisión en sólo un pequeño subespacio de dimensión N . Este hecho en general constituye una singularidad que, aunque deseable (permitiría concentrar la información en sólo unos pocos coeficientes), no se da en la realidad, ya que se necesita la base completa para representar totalmente a la señal s_k . En este caso $N=L$, $M=\mu$ y la mejora de la SNR queda

$$\Delta SNR^{ss} = \frac{1}{\mu} \quad (6.96)$$

Al respecto de este resultado cabe remarcar que esta expresión sólo tiene validez en estado estacionario, después de que el algoritmo de adaptación ha convergido, ya que para su deducción se ha partido de la expresión del error cuadrático medio en estado estacionario.

A continuación se analiza la mejora de la SNR previamente al estado estacionario, o lo que es lo mismo, cómo evoluciona esta mejora desde el comienzo de la adaptación

hasta el estado estacionario. Para ello se supone que los elementos de la base que actúan como entradas de referencia son todos, y por tanto toda la señal s_k puede ser totalmente representada.

La señal de salida del sistema (y_k) en un instante k puede expresarse del siguiente modo

$$y_k = E[y_k] + y_k - E[y_k]. \quad (6.97)$$

Si se denomina

$$s'_k = E[y_k] \quad \text{y} \quad n'_k = y_k - E[y_k] = y_k - s'_k \quad (6.98)$$

se tiene que

$$y_k = s'_k + n'_k. \quad (6.99)$$

A continuación se probará que s'_k es la componente de y_k correlada con s_k , y que n'_k es el ruido residual no correlado con s'_k . Para ello de 6.4 se puede escribir s'_k como

$$s'_k = E[y_k] = E[\mathbf{W}_k^T \mathbf{X}_k] = E[\mathbf{W}_k^T] \mathbf{X}_k. \quad (6.100)$$

Para calcular el término $E[\mathbf{W}_k^T]$ de esta expresión se hace uso de la ecuación recursiva para $E[\mathbf{W}_k^T]$, dada en 6.32, para el caso del algoritmo LMS:

$$E[\mathbf{W}_{k+1}] = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R})E[\mathbf{W}_k] + 2\mu\mathbf{R}\mathbf{W}^*. \quad (6.101)$$

Sumando y restando \mathbf{W}^* y sustituyendo \mathbf{R} por su valor $\mathbf{R} = \frac{1}{L}\mathbf{I}$, resulta:

$$E[\mathbf{W}_{k+1}] = \mathbf{W}^* + \left(1 - 2\frac{\mu}{L}\right) (E[\mathbf{W}_k] - \mathbf{W}^*), \quad (6.102)$$

y suponiendo inicialmente $\mathbf{W}_k = \mathbf{W}_0$

$$E[\mathbf{W}_k] = \mathbf{W}^* - \left(1 - 2\frac{\mu}{L}\right)^k (\mathbf{W}^* - \mathbf{W}_0). \quad (6.103)$$

si $\mathbf{W}_0 = 0$ (situación más frecuente en la inicialización del algoritmo) se obtiene

$$E[\mathbf{W}_k] = \mathbf{W}^* \left(1 - \left(1 - 2\frac{\mu}{L}\right)^k\right). \quad (6.104)$$

En este caso $N=L$, y por tanto de 6.64 :

$$\mathbf{W}^* \mathbf{X}_k = \sum_{i=1}^N w_i^* b_{ik} = \sum_{i=1}^L c_i b_{ik} = s_k. \quad (6.105)$$

Retomando la expresión 6.100 de s'_k y sustituyendo en ella 6.104 y 6.105, resulta:

$$s'_k = E[\mathbf{W}_k^T] \mathbf{X}_k = \left(1 - \left(1 - 2\frac{\mu}{L}\right)^k\right) \mathbf{W}^* \mathbf{X}_k = \left(1 - \left(1 - 2\frac{\mu}{L}\right)^k\right) s_k. \quad (6.106)$$

Este hecho demuestra que efectivamente $s'_k = E[y_k]$ es proporcional a s_k , que es la señal que se pretende recuperar. Cuando $k \rightarrow \infty$ s'_k se convierte efectivamente en s_k , ya que por la condición de convergencia $\mu < L$, y entonces $|1 - 2\mu/L| < 1$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - 2\mu/L)^k = 0$. Es decir,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s'_k = s_k. \quad (6.107)$$

Por otra parte

$$n'_k = y_k - E[y_k], \quad (6.108)$$

y por tanto

$$E[n'_k] = E[y_k] - E[y_k] = 0. \quad (6.109)$$

Calculando

$$E[s'_k n'_k] = E[y_k] E[n'_k] = 0. \quad (6.110)$$

Es decir, s'_k y n'_k son no correladas y s'_k es proporcional a s_k ; por tanto, s_k no está correlada con n'_k y sólo lo está con s'_k . En definitiva, s'_k es la parte de señal de la salida del sistema adaptativo y_k correlada con s_k , y por tanto, la parte que interesa recuperar o que tiene un significado.

Visto este hecho parece, lógico definir la SNR en la señal y_k en un instante cualquiera, no necesariamente en el estado estacionario, como

$$SNR_y = \frac{E[s_k'^2]}{E[n_k'^2]}. \quad (6.111)$$

Esta expresión tiene el significado físico de considerar como señal determinista de interés no a la señal s_k , sino a la parte proporcional a ella que en cada momento el proceso de adaptación ha podido recuperar. El resto, n'_k , es considerado ruido. Esta definición tiene la limitación de la precisión asociada a la cuantificación de la señal cuando inicialmente ésta tenga unos valores muy pequeños, pero este problema sólo podría, eventualmente, presentarse en las primeras recurrencias de la señal y para valores de μ extremadamente pequeños, por lo que no supone una excesiva limitación.

Para evaluar SNR_y en función de SNR_d se necesita conocer la relación de $E[s_k'^2]$ y $E[n_k'^2]$ con $E[s_k^2]$ y $E[n_k^2]$. La dependencia de $E[s_k'^2]$ ya ha sido determinada previamente al obtener s_k' proporcional a s_k ; resta únicamente por calcular la relación de $E[n_k'^2]$. Para ello se considera:

$$y_k - s_k = s_k' + n_k' - s_k, \quad (6.112)$$

y se toman los valores esperados del cuadrado de esta expresión, que teniendo en cuenta el hecho de que n_k' es no correlado ni con s_k' ni con s_k , se obtiene

$$E[(y_k - s_k)^2] = E[n_k'^2] + E[(s_k' - s_k)^2]. \quad (6.113)$$

Por otra parte, en este caso $N = L$ y, de 6.70, $\xi_{min} = E[n_k^2] = \sigma^2$. Sustituyendo en 6.6, resulta

$$E[(s_k - y_k)^2] = \xi - \xi_{min}, \quad (6.114)$$

También se conoce que ξ tiende a su valor en estado estacionario según una progresión geométrica (Widrow, 1985) con un tiempo de convergencia igual a la mitad que para los pesos W . Por tanto la expresión de recurrencia 6.103 para $E[W_k]$ podrá escribirse ahora para ξ del siguiente modo

$$\xi = \xi_{min}(1 + M) + \left(1 - 2\frac{\mu}{L}\right)^{2k} \left(E[d_k^2] - \xi_{min}(1 + M)\right), \quad (6.115)$$

donde $\xi_{min}(1 + M)$ es el valor de ξ en el estado estacionario, $E[d_k^2]$ es el valor de ξ en $k = 0$, y el factor $2k$ es debido a que el tiempo de convergencia es la mitad que en el caso de los pesos.

Sustituyendo en 6.114 el valor de ξ y haciendo uso de $M = \mu$ y $\xi_{min} = E[n_k^2]$, resulta

$$E[(s_k - y_k)^2] = \mu E[n_k^2] + \left(1 - 2\frac{\mu}{L}\right)^{2k} \left(E[s_k^2] - \mu E[n_k^2]\right), \quad (6.116)$$

despejando ahora de la ecuación 6.113 el valor de $E[n_k'^2]$ y sustituyendo de 6.116 y 6.106, se obtiene

$$E[n_k'^2] = \mu E[n_k^2] \left(1 - \left(1 - 2\frac{\mu}{L}\right)^{2k}\right). \quad (6.117)$$

Calculando SNR_y que ha sido el objetivo de los cálculos precedentes, se tiene

$$SNR_y = \frac{E[s_k'^2]}{E[n_k'^2]} = \frac{\left(1 - \left(1 - 2\frac{\mu}{L}\right)^k\right)^2 E[s_k^2]}{\left(1 - \left(1 - 2\frac{\mu}{L}\right)^{2k}\right) \mu E[n_k^2]} \quad (6.118)$$

$$SNR_y = \frac{SNR_d \left(1 - \left(1 - 2\frac{\mu}{L}\right)^k\right)^2}{\mu \left(1 - \left(1 - 2\frac{\mu}{L}\right)^{2k}\right)}, \quad (6.119)$$

y por tanto la mejora de la SNR (ΔSNR_y) vale

$$\Delta SNR_y = \frac{1 \left(1 - \left(1 - 2\frac{\mu}{L}\right)^k\right)^2}{\mu \left(1 - \left(1 - 2\frac{\mu}{L}\right)^{2k}\right)}. \quad (6.120)$$

Esta expresión puede reformularse suponiendo que k corresponde a un número entero de ocurrencias de la señal, es decir, $k = AL$ con A el número de ocurrencias.

$$\Delta SNR_y = \frac{1 \left(1 - \left(1 - 2\frac{\mu}{L}\right)^{AL}\right)^2}{\mu \left(1 - \left(1 - 2\frac{\mu}{L}\right)^{2AL}\right)} \quad (6.121)$$

Esta expresión cuando $A \rightarrow \infty$ recupera el resultado dado en 6.96 para estado estacionario, ya que $|1 - 2\mu/L| < 1$ y entonces

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \Delta SNR_y = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{M} \quad (6.122)$$

Como por la condición de convergencia normalmente $2\mu/L \ll 1$, se puede aproximar la expresión de ΔSNR_y por

$$\Delta SNR_y \simeq \frac{1 \left(1 - (1 - 2\mu)^A\right)^2}{\mu \left(1 - (1 - 2\mu)^{2A}\right)} \quad (6.123)$$

y cuando A es suficientemente pequeño, de modo que se satisface $\mu A \ll 1$, se puede aproximar $(1 - 2\mu)^A \simeq (1 - 2\mu A)$, de modo que

$$\Delta SNR_y \simeq A \quad (6.124)$$

Nótese que este resultado es el mismo que se obtiene con un promediado de señal después de promediar un número A de realizaciones (Lynn, 1982). Sin embargo en ese caso la mejora de la SNR crece indefinidamente con A , y en este sistema adaptativo tiende a un valor constante $\frac{1}{\mu}$. La contrapartida es que este sistema es capaz de adaptar y evidenciar cambios dinámicos de la señal mientras que un promediado no.

En la figura 6.3 se representa la evolución de ΔSNR_y para distintos valores de μ en función del número A de recurrencias de la señal. Se observa cómo en el origen todas las curvas tienen pendientes unitarias $\Delta SNR_y(A) = A$, y luego tienden al valor en estado estacionario $1/\mu$.

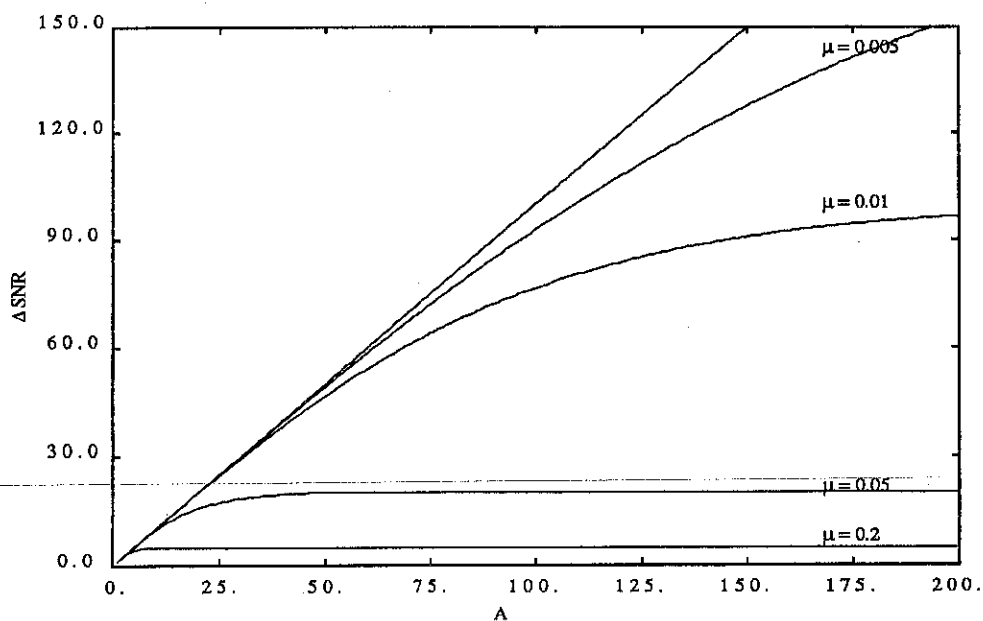


Figura 6.3: Mejora de la SNR en función del número de recurrencias (A).

ΔSNR_y en función del número A de recurrencias de la señal (1, 200) para los diferentes valores de μ indicados en la gráfica, y suponiendo que la entrada de referencia X_k del sistema adaptativo contiene todos los elementos de la base. Pueden compararse estas mejoras con la recta de mejora dada por un promediado clásico de señal (recta de pendiente unidad).

6.4 Estimación adaptativa del complejo QRS con las funciones de Hermite

El esquema propuesto anteriormente para procesamiento adaptativo de señales recurrentes, y en particular para la señal ECG, tendrá sentido en la medida que existan aplicaciones con utilidad práctica para obtener alguna información presente en la señal. Con este objetivo se propone la aplicación del sistema a la estimación adaptativa de la forma del complejo QRS.

Las variaciones dinámicas de forma del complejo QRS (y por tanto de los parámetros que la describen), así como la forma en sí misma están relacionadas con el funcionamiento del corazón y con su evolución. Generalmente, muchas patologías no pueden asociarse con un único parámetro característico de la señal sino con una combinación de ellos. El obtener un conjunto de parámetros no redundante, que contengan el máximo de información y cuyo número sea el menor posible, facilitaría el análisis y estudio de la señal y sus, eventualmente, patologías asociadas.

Con este objetivo fue presentado un modelo matemático para la forma del complejo QRS (Sörnmo y otros, 1981) basado en las funciones de Hermite. Este modelo fue analizado por Sörnmo y otros (1981) en 200 complejos QRS pertenecientes a 126 pacientes, viéndose que con tres funciones del modelo de Hermite se podía representar en término medio el 98% de la energía de estos complejos. Este resultado ha llevado a considerar estas funciones ortonormales de Hermite como las entradas de referencia del sistema adaptativo propuesto (Laguna y otros, 1989b). Así se tendrá una caracterización del QRS a través del valor de los pesos w_i en las N funciones del modelo.

En este apartado se estudia el comportamiento del sistema con estas funciones de Hermite como entrada de referencia y con la particularidad de tener un parámetro de anchura b también adaptable cada recurrencia. Se ha analizado teóricamente el comportamiento de la adaptación de este parámetro b y del vector de pesos W . El modelo propuesto se ha validado con distintas morfologías de QRS y secuencias reales de éstos. También se analiza la validez del parámetro b para detectar QRS ectópicos, y del vector de pesos W para clasificar QRS de distinta forma.

6.4.1 El modelo de Hermite

Las funciones ortonormales de Hermite vienen descritas por:

$$\Phi_n(t, b) = \frac{1}{\sqrt{b} 2^n n! \sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2b^2}} H_n(t/b) \quad (n = 0, \dots, N-1), \quad (6.125)$$

donde $H_n(t/b)$ son los polinomios de Hermite que pueden calcularse (Spiegel, 1970) según la siguiente expresión:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (6.126)$$

o bien de la relación de recurrencia

$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x) \quad (6.127)$$

con $H_0(x) = 1$.

El parámetro b controla la anchura temporal en la que se extenderá la energía de cada función, ya que define la anchura de la Gaussiana que modula a los polinomios de Hermite.

En la figura 6.4 se han representado las funciones de Hermite para valores de $n = 0, 1, 2, 3$ y 4 . Nótese cómo estas funciones recuerdan por sí solas a las morfologías típicas de un QRS, lo que está de acuerdo con el hecho de que las tres primeras recojan alrededor del 90% de la energía de éste. Estas funciones están construidas de modo que son ortonormales, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(t, b) \Phi_{n'}(t, b) dt = \begin{cases} 0 & n \neq n' \\ 1 & n = n' \end{cases}, \quad (6.128)$$

por tanto, pueden considerarse como entradas de referencia del modelo adaptativo en estudio y aplicar las expresiones para él deducidas. Al hacer esto se deben tomar las siguientes precauciones.

Primera, este conjunto de funciones es ortonormal en el intervalo $[-\infty, \infty]$. Sin embargo, la anchura de cada recurrencia de un complejo QRS es finita (intervalo de longitud $L \cdot T$), y así se considera en esta aplicación. Las funciones de Hermite en principio se consideran centradas en el intervalo de definición del QRS, y además se considera que el parámetro b es tal que el valor de las funciones $\Phi_n(t, b)$ ($n=0, \dots, N-1$) para t fuera del intervalo de definición del QRS es prácticamente cero. Para ello,

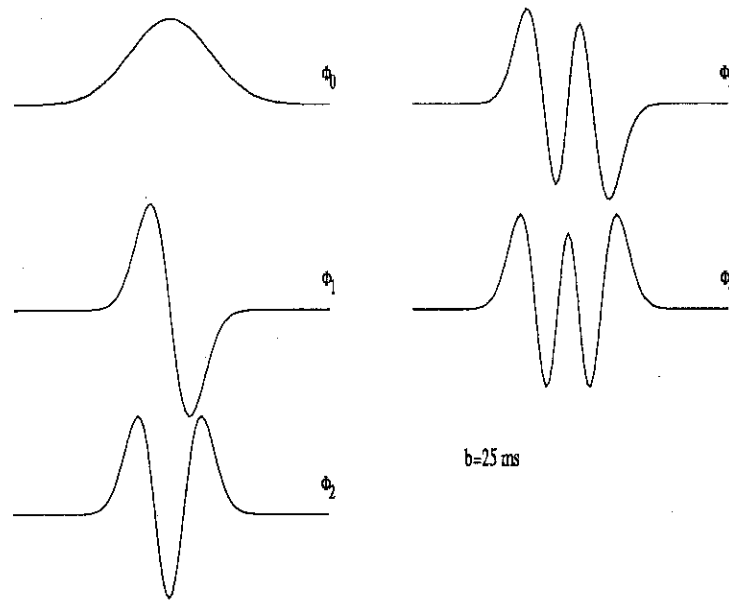


Figura 6.4: Cinco primeras funciones de Hermite en un intervalo de 400 ms y para un valor de $b=25$ ms.

es necesario que b sea suficientemente pequeño respecto a la longitud del intervalo. Este hecho hace que puedan seguirse considerando funciones ortonormales dentro del intervalo $[-\frac{L}{2}T, \frac{L}{2}T]$ sin cometerse un error apreciable. Observando la figura 6.4 se ve que esta condición puede conseguirse, dada la forma de $\Phi_n(t, b)$. Si el orden N que se toma es elevado, entonces $\Phi_n(t, b)$ satisface cada vez menos este requisito, dado que $H_n(t, b)$ es un polinomio de grado n y por tanto para n altos se requiere un tiempo t mayor para que $\Phi_n(t, b)$ tienda a cero. Este problema puede solucionarse sin más que extender la ventana de definición del QRS con un valor nulo de señal, y así se puede aproximar con la precisión que se quiera la ortonormalidad de las funciones.

Segunda, el conjunto de funciones $\Phi_n(t, b)$ no constituye una base en $[-\infty, \infty]$: por tanto, no podrá considerarse que un complejo QRS de forma arbitraria puede ser totalmente representado por estas funciones. Sin embargo, como ya se ha comentado, la mayor parte de la energía de los QRS puede representarse con un muy reducido número de ellas.

Tercera, al discretizar estas funciones $\Phi_n(t, b)$ ($\Phi_{nk}(b)$) y considerar su valor esperado

en el intervalo $[-L/2, L/2]$, se tendrá

$$1 \simeq \int_{-L/2}^{L/2} \Phi_n^2(t, b) dt \simeq \sum_{k=-L/2}^{L/2} \Phi_{nk}^2(b) T = E[\Phi_{nk}^2(b)] L T, \quad (6.129)$$

por tanto se puede aproximar

$$E[\Phi_{nk}^2(b)] = \frac{1}{L T}, \quad (6.130)$$

y las matrices \mathbf{R} y \mathbf{P} valdrán

$$\mathbf{R} = \frac{1}{L T} \mathbf{I} \quad \text{y} \quad \mathbf{P} = \frac{1}{L T} [c_0, c_1, \dots, c_{(N-1)}]^T. \quad (6.131)$$

El valor de L está medido en periodos de muestreo. Por simplicidad se seguirá denotando al producto $L T$ por L , en el entendido que ahora L es el valor temporal del intervalo de definición de los QRS en las unidades tales que se cumple 6.129. Otra forma de solucionar este hecho sería realizar una renormalización de las funciones $\Phi_n(t, b)$.

6.4.2 El esquema adaptativo con el modelo de Hermite

El esquema adaptativo que se propone en este caso es el ya estudiado en el apartado 6.3, con algunas modificaciones para que el parámetro de anchura b sea también adaptado, de modo que se puede obtener una medida de la variación de la anchura del QRS con el tiempo a través de sus variaciones. Cada parámetro b define un conjunto diferente de funciones $\Phi_n(t, b)$, que siguen siendo ortonormales entre si.

En la figura 6.5 se presenta el modelo adaptativo particularizado para este caso. El vector \mathbf{X}_k tiene una dependencia adicional con el parámetro b :

$$\mathbf{X}_k(b) = (\Phi_{0k}(b), \Phi_{1k}(b), \dots, \Phi_{(N-1)k}(b)). \quad (6.132)$$

Debido a esta dependencia, las matrices \mathbf{P} y \mathbf{R} también la presentan ($\mathbf{P}(b)$ y $\mathbf{R}(b)$), si bien, dado que $\Phi_n(t, b)$ es un conjunto de funciones ortonormales para cualquier valor de b , la dependencia de $\mathbf{R}(b)$ con b queda anulada y $\mathbf{R} = \frac{1}{L} \mathbf{I}$. El vector $\mathbf{P}(b)$ puede expresarse como.

$$\mathbf{P} = \frac{1}{L} [c_0(b), c_1(b), \dots, c_{N-1}(b)]^T \quad (6.133)$$

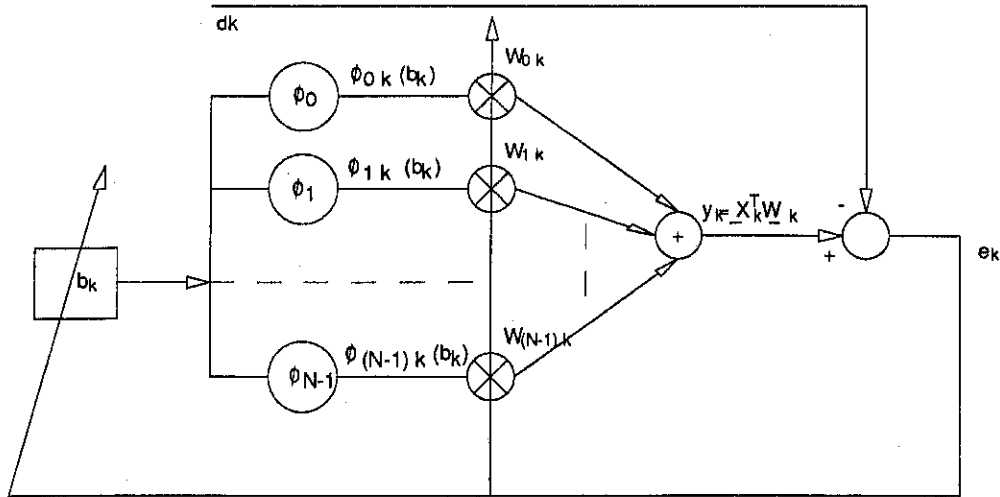


Figura 6.5: Esquema adaptativo para el modelo de Hermite. Nótese cómo las funciones que sirven de entrada de referencia son generadas con un parámetro b variable.

donde $c_n(b)$ son las componentes del QRS en cada función $\Phi_n(t, b)$.

El algoritmo LMS para ajustar los pesos dará la ya conocida expresión

$$W_{k+1} = W_k + 2\mu_1 e_k X_k(b). \tag{6.134}$$

Para ajustar el parámetro b se sigue la misma aproximación que hace el LMS para ajustar los pesos. De acuerdo con el apartado 6.2.3 :

$$\nabla E[e_k^2] \equiv \nabla e_k^2 = 2e_k \nabla e_k \tag{6.135}$$

En este caso se considerará la dependencia del error cuadrático medio con b y se calcula el gradiente respecto a esta variable para encontrar el b que hace mínimo $E[e_k^2]$. La aproximación que se realiza es la siguiente:

$$\frac{\partial E[e_k^2(b)]}{\partial b} \simeq 2e_k(b) \frac{\partial e_k(b)}{\partial b}, \tag{6.136}$$

y usando que $e_k(b) = d_k - y_k(b)$ se obtiene

$$\frac{\partial e_k(b)}{\partial b} = -\frac{\partial y_k(b)}{\partial b}. \tag{6.137}$$

La expresión para recalculer el valor de b en cada recurrencia puede escribirse como

$$b_{k+1} = b_k + 2\mu_2 e_k(b_k) \frac{\partial y_k(b_k)}{\partial b_k}, \tag{6.138}$$

o bien

$$b_{k+1} = b_k + 2\mu_2 e_k(b_k) \sum_{n=0}^{N-1} w_n \frac{\partial \Phi_{nk}(b_k)}{\partial b_k}. \quad (6.139)$$

Nótese que en este caso se consideran factores de ganancia μ diferentes en la adaptación de los pesos (μ_1) que en la adaptación de b (μ_2). Estos dos parámetros se controlarán de forma independiente y darán lugar a dos condiciones de convergencia para ellos.

Para poder llevar a la práctica de manera eficiente el algoritmo de adaptación de la b , se ha de estudiar la forma de la expresión $\frac{\partial \Phi_n(t,b)}{\partial b}$, y comprobar si puede calcularse de una forma cómoda en función de $\Phi_n(t,b)$. Calculando el valor de $\frac{\partial \Phi_n(t,b)}{\partial b}$ a partir de la ecuación 6.125, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_n(t,b)}{\partial b} &= \frac{-2^n n! \sqrt{\pi}}{2 \left(\sqrt{b} 2^n n! \sqrt{\pi} \right)^3} - \frac{1}{2b \sqrt{b} 2^n n! \sqrt{\pi}} \left(e^{-\frac{t^2}{2b}} H_n(t/b) \right) \\ &+ \frac{e^{-\frac{t^2}{2b}}}{\sqrt{b} 2^n n! \sqrt{\pi}} \left[2n \frac{-t}{b^2} H_{n-1}(t/b) + \frac{t^2}{b^3} H_n(t/b) \right]. \end{aligned} \quad (6.140)$$

En esta expresión aparecen términos de la forma $xH_n(x)$ y $x^2H_n(x)$. Para poderlos escribir en función únicamente de los propios polinomios de Hermite, se despeja en 6.127 y se obtiene:

$$x H_n(x) = \frac{H_{n+1}(x)}{2} + n H_{n-1}(x). \quad (6.141)$$

Multiplicando por x y sustituyendo nuevamente $xH_{n+1}(x)$ y $xH_{n-1}(x)$ por su valor, resulta

$$x^2 H_n(x) = \frac{H_{n+2}(x)}{4} + \frac{2n+1}{2} H_n(x) + n(n-1) H_{n-2}(x). \quad (6.142)$$

Sustituyendo estas expresiones en 6.140 y reagrupando convenientemente los términos, resulta que

$$\frac{\partial \Phi_n(t,b)}{\partial b} = \frac{1}{2b} \left[-\sqrt{n(n-1)} \Phi_{n-2}(t,b) + \sqrt{(n+2)(n+1)} \Phi_{n+2}(t,b) \right]. \quad (6.143)$$

De esta expresión se pueden sacar dos conclusiones importantes. La primera es que el algoritmo de adaptación propuesto para la b puede llevarse a la práctica directamente con los valores del vector $\mathbf{X}_k(b)$ sin necesidad de cálculos adicionales, debido a la expresión de $\frac{\partial \Phi_n(t,b)}{\partial b}$ como función de las funciones $\Phi_n(t,b)$. La segunda conclusión es que $\frac{\partial \Phi_n(t,b)}{\partial b}$ es una función ortogonal con $\Phi_n(t,b)$ y por tanto se puede escribir que

$$E \left[\Phi_n(t,b) \frac{\partial \Phi_n(t,b)}{\partial b} \right] = 0 \quad (6.144)$$

Este resultado se usará más adelante en el análisis de la convergencia del parámetro b .

En la figura 6.6 se muestran las funciones $\Phi_n(t, b)$ y sus derivadas respecto al parámetro b . En el caso de $n=0$ se ve como efectivamente la derivada respecto a b es proporcional a $\Phi_2(t, b)$

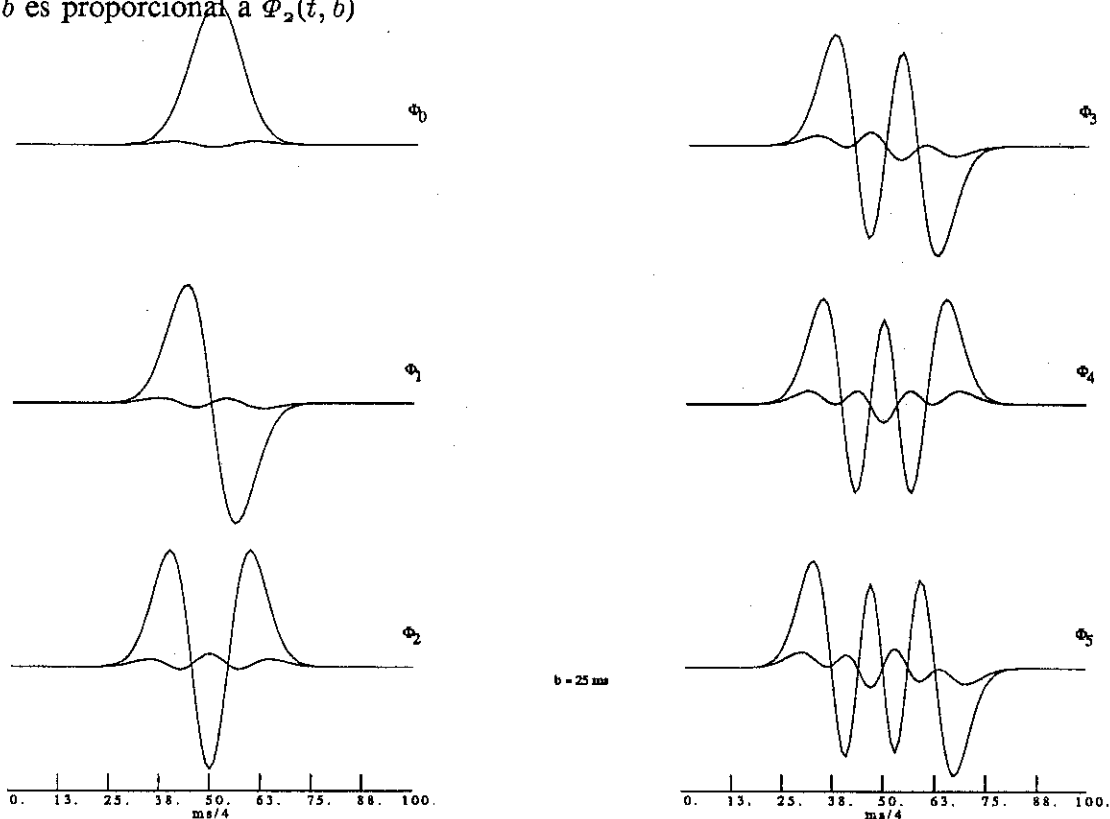


Figura 6.6: Derivadas respecto a b de las seis primeras funciones de Hermite superpuestas con la función original que corresponde a la gráfica de máxima amplitud en cada caso.

La adaptación de cada recurrencia en este modelo se inicia de acuerdo con los instantes de ocurrencia dados por el detector selectivo de QRS.

6.4.3 Convergencia del parámetro b

En este esquema adaptativo aparece un elemento nuevo respecto al considerado en apartados previos de forma general. Este elemento es el parámetro b con una constante de adaptación μ_2 . En principio no se conocen las condiciones que debe cumplir este

parámetro μ_2 para que la adaptación converja, lo cual se analiza en este apartado. Para ello se toman valores esperados en 6.138 y se obtiene

$$E[b_{k+1}] = E[b_k] + 2\mu_2 E \left[e_k(b_k) \frac{\partial y_k(b_k)}{\partial b_k} \right], \quad (6.145)$$

y sustituyendo el valor de $e_k(b_k)$ resulta que

$$E[b_{k+1}] = E[b_k] + 2\mu_2 \left(E \left[d_k \frac{\partial y_k(b_k)}{\partial b_k} \right] - E \left[y_k(b_k) \frac{\partial y_k(b_k)}{\partial b_k} \right] \right). \quad (6.146)$$

Para obtener una primera estimación de la condición de convergencia, se supondrá que las adaptaciones de b y de \mathbf{W} son independientes. Al estudiar la convergencia de b y calcular los valores esperados se supondrá que el vector \mathbf{W} permanece constante con un determinado valor. Esto es equivalente a plantear unos pesos fijos \mathbf{W} y adaptar sólo el parámetro b . Además se supondrá que $\mathbf{W} = \mathbf{W}^*(b_0)$, es decir, los pesos son los del error mínimo para el parámetro b de inicialización (b_0). En estas condiciones se puede escribir

$$y_k(b) = \mathbf{W}^{*T}(b_0) \mathbf{X}_k(b) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n^*(b_0) \Phi_{nk}(b) \quad (6.147)$$

y como las funciones de Hermite son ortonormales para cualquier valor de b , se obtiene

$$E[y_k^2(b)] = \sum_{n=0}^{N-1} w_n^{*2}(b_0) E[\Phi_{nk}^2(b)] = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{N-1} w_n^{*2}(b_0) = \text{cte.} \quad (6.148)$$

Si se deriva con respecto a b los dos lados de esta expresión resulta

$$2E \left[y_k(b) \frac{\partial y_k(b)}{\partial b} \right] = 0 \quad (6.149)$$

y se puede reescribir el valor esperado de la relación de recurrencia para la adaptación de b (ecuación 6.146) como

$$E[b_{k+1}] = E[b_k] + 2\mu_2 E \left[d_k \frac{\partial y_k(b_k)}{\partial b_k} \right]. \quad (6.150)$$

Así como en la adaptación de los pesos se conoce que el vector \mathbf{W} converge a \mathbf{W}^* en estado estacionario, se puede analizar en este caso cual es la situación de convergencia. Procediendo análogamente, esta situación se dará cuando el error cuadrático medio

$$E[e_k^2(b)] = E[d_k^2] - 2\mathbf{P}^T(b)\mathbf{W} + \mathbf{W}^T \mathbf{R} \mathbf{W} \quad (6.151)$$

sea mínimo, y por tanto, cuando

$$\frac{\partial E[e_k^2(b)]}{\partial b} = -2 \frac{\partial \mathbf{P}^T(b)}{\partial b} \mathbf{W} = 0. \quad (6.152)$$

Sustituyendo \mathbf{P} por su valor resulta que

$$\sum_{n=0}^{N-1} E \left[w_n d_k \frac{\partial \Phi_{nk}(b)}{\partial b} \right] = E \left[d_k \frac{\partial y_k(b)}{\partial b} \right] = 0. \quad (6.153)$$

Cuando la b haya convergido (b^*) se cumplirá que

$$E \left[d_k \frac{\partial y_k(b)}{\partial b} \right]_{b=b^*} = 0. \quad (6.154)$$

Este resultado es intuitivo, ya que si se está en situación estacionaria se debe cumplir que $E[b_{k+1}] = E[b_k]$, y por tanto, de 6.150, se recupera el mismo resultado de 6.154. Esto es equivalente a decir que el estado estacionario es aquél en el que no se puede representar más componente determinista de d_k de la y representada.

Para analizar la convergencia de la expresión 6.150 se necesita conocer $E \left[d_k \frac{\partial y_k(b_k)}{\partial b} \right]$ como función del parámetro b . Para ello, y sustituyendo y_k por su valor en función de las funciones de Hermite

$$E \left[d_k \frac{\partial y_k(b_k)}{\partial b} \right] = E \left[\sum_{n=0}^{N-1} w_n^*(b_0) d_k \frac{\partial \Phi_{nk}(b_k)}{\partial b} \right]. \quad (6.155)$$

Sustituyendo de 6.143, y suponiendo b_k no correlado con $\Phi_{nk}(b_k)$, se obtiene

$$E \left[d_k \frac{\partial y_k(b_k)}{\partial b} \right] = \frac{1}{2E[b_k]} \sum_{n=0}^{N-1} w_n^*(b_0) E \left[d_k \left(-\sqrt{n(n-1)} \Phi_{(n-2)k}(b_k) + \sqrt{(n+2)(n+1)} \Phi_{(n+2)k}(b_k) \right) \right] \quad (6.156)$$

$$E \left[d_k \frac{\partial y_k(b_k)}{\partial b} \right] = \frac{1}{2E[b_k]L} \sum_{n=0}^{N-1} w_n^*(b_0) \left(-\sqrt{n(n-1)} w_{n-2}^*(E[b_k]) + \sqrt{(n+2)(n+1)} w_{n+2}^*(E[b_k]) \right), \quad (6.157)$$

donde $w_n^*(b)$ son los pesos a los que convergería el sistema con un parámetro b fijado previamente. Nuevamente se realiza otra aproximación considerando que $w_n^*(E[b_k])$ toman valores constantes w_n^* , aunque presentan una pequeña dependencia con b , despreciable respecto al término $\frac{1}{E[b_k]}$ que aparece en la expresión. Esta aproximación resulta aceptable si se precisa que variaciones sólo en la anchura del QRS no suponen modificaciones importantes en la energía de la señal representada por cada función $\Phi_{nk}(t)$. De este modo y realizando el sumatorio, resulta:

$$E \left[d_k \frac{\partial y_k(b_k)}{\partial b} \right] = \frac{1}{2E[b_k]L} \left(\sqrt{N(N-1)} w_{N-2}^* w_N^* + \sqrt{(N+1)N} w_{N-1}^* w_{N+1}^* \right) \quad (6.158)$$

Nótese que se han anulado todos los términos, excepto los de orden más alto, ya que la derivada de una función $\Phi_n(t, b)$ respecto a b es proporcional a otras funciones $\Phi'_n(t, b)$ (ecuación 6.143) y sólo las de $n = N - 2$ y $n = N - 1$ dan una contribución que no se anula con las de las demás.

Si se desarrolla esta función $E[b_k]$ en series de Taylor en torno al valor de convergencia $E[b_k]=b^*$, y se toman sólo los términos de primer orden (teniendo en cuenta 6.154), su sustitución en 6.150, permite escribir:

$$E[b_{k+1}] = E[b_k] - \frac{\mu_2}{b^{*2}L} \left(\sqrt{N(N-1)}w_{N-2}^*w_N^* + \sqrt{(N+1)N}w_{N-1}^*w_{N+1}^* \right) (E[b_k] - b^*), \quad (6.159)$$

y llamando

$$a = \frac{\mu_2}{b^{*2}L} \left(\sqrt{N(N-1)}w_{N-2}^*w_N^* + \sqrt{(N+1)N}w_{N-1}^*w_{N+1}^* \right) \quad (6.160)$$

resulta que

$$E[b_{k+1}] = E[b_k](1 - a) + ab^*. \quad (6.161)$$

Esta expresión es análoga a la 6.102. Procediendo de la misma forma que con esta expresión, y suponiendo que para $k=0$ se tiene b_0 , resulta:

$$E[b_k] = b^* + (1 - a)^k(b_0 - b^*). \quad (6.162)$$

Para que esta expresión converja se debe cumplir que

$$0 < a < 2 \quad (6.163)$$

y sustituyendo el valor de a se obtiene

$$\mu_2 < \frac{2Lb^{*2}}{\left(\sqrt{N(N-1)}w_{N-2}^*w_N^* + \sqrt{(N+1)N}w_{N-1}^*w_{N+1}^* \right)} \quad (6.164)$$

Para estimar el orden de esta cota se supondrá que

$$\sqrt{N(N-1)} \simeq \sqrt{(N+1)N} \simeq N, \quad (6.165)$$

y entonces

$$\mu_2 < \frac{2Lb^{*2}}{N \left(w_{N-2}^*w_N^* + w_{N-1}^*w_{N+1}^* \right)}. \quad (6.166)$$

Por otro lado w_{N-2}^* , w_{N-1}^* , w_N^* y w_{N+1}^* son los pesos de orden más alto, esto quiere decir que la energía de la señal QRS en estos pesos será del orden del 10% del

total. Esta consideración lleva a suponer que los productos $w_{N-2}^* w_N^*$ y $w_{N-1}^* w_{N+1}^*$ son siempre menores que el promedio de energía del QRS en cada función (w_n^{*2}), es decir, que

$$N(w_{N-2}^* w_N^*) < SE \quad \text{y} \quad N(w_{N-1}^* w_{N+1}^*) < SE, \quad (6.167)$$

donde SE es la energía total de la señal

$$SE = E[d_k^2] L. \quad (6.168)$$

Con este valor de SE se puede tomar una cota más restrictiva para μ_2 , a fin de garantizar la convergencia

$$\mu_2 < \frac{Lb^{*2}}{SE} < \frac{2Lb^{*2}}{N(w_{N-2}^* w_N^* + w_{N-1}^* w_{N+1}^*)} \quad (6.169)$$

y tomar como límite de convergencia

$$\mu_2 < \frac{Lb^{*2}}{SE}. \quad (6.170)$$

De acuerdo con esta expresión, la condición de convergencia depende de la señal a través de su energía SE . Este hecho está en consonancia con la ecuación 6.138, donde el factor que multiplica a μ_2 depende de $y_k(b)$ y éste a su vez es función de la señal en estudio a través de W . Por tanto, el producto de μ_2 con algún factor dependiente de la señal (SE) deberá estar acotado para que la expresión converja. Esto quiere decir que el factor μ_2 en realizaciones reales deberá ajustarse teniendo en cuenta la amplitud de la señal de entrada. Si esta amplitud puede variar con el tiempo, la necesaria modificación de μ_2 puede obtenerse mediante la estimación periódica de la SE a la entrada, y definir un

$$\mu_2' = \mu_2 SE. \quad (6.171)$$

De este modo, la ecuación 6.138 se convierte en

$$b_{k+1} = b_k + 2 \frac{\mu_2'}{SE} e_k(b) \frac{\partial y_k(b)}{\partial b}, \quad (6.172)$$

Ahora el factor μ_2' deberá cumplir que

$$\mu_2' < L b^{*2}. \quad (6.173)$$

$L b^{*2}$ es un valor que no depende de la señal, lo que indica que μ_2' será el mismo para cualquier amplitud de la señal. Sin embargo, se deberá estimar con la frecuencia

suficiente la SE , de modo que la ecuación 6.172 no diverja porque SE cambie en la señal sin variar el algoritmo de adaptación.

Análogamente se puede estimar el tiempo de convergencia (τ_b) de 6.162. Este podrá aproximarse por $\tau_b \simeq 1/a$, resultando

$$\tau_b \simeq \frac{L b^*2}{\mu_2 SE} \quad (6.174)$$

6.4.4 Aplicaciones a complejos QRS reales

Para comprobar los resultados de este modelo adaptativo de estimación de la forma del QRS se han considerado las siguientes situaciones con señales ECG reales.

6.4.4.1 Estimación con un mismo QRS repetido secuencialmente

La primera y más sencilla prueba para validar el procesado anteriormente expuesto consiste en considerar un QRS real proveniente del ECG de un paciente. Con este QRS se forma una secuencia consistente en éste repetido A veces. De este modo se puede considerar que toda la señal es determinista, ya que toda ella se repite exactamente cada una de las A recurrencias. La energía de la señal determinista, por tanto, podrá ser calculada exactamente (SE) y de este modo validar las expresiones calculadas en el apartado anterior. El valor del ruido n_k es nulo en este caso.

El QRS seleccionado es una ventana de 200 ms abierta en torno a la posición dada por el detector selectivo de QRS en la señal filtrada paso alto. De este modo se evita que las variaciones de la línea de base sean modeladas como QRS. Esta señal está muestreada a 250 Hz y se ha extendido hasta 400 ms, añadiendo 100 ms a cada lado de la señal con un valor nulo. Con ello se asegura la ortogonalidad de las funciones Φ_n consideradas en el intervalo en que está definido el QRS. El número total de muestras total de una ventana es entonces 100 y el valor de L es $L=400$ ms. Nótese que no se toma L en muestras, debido a la diferente normalización de la señal (apartado 6.4.1).

En la figura 6.7 se observan los resultados de la estimación adaptativa para dos QRS (QRS1, QRS2), procedentes de distintos pacientes. Las señales fueron registradas con el sistema descrito en capítulo 3, cuando se han estudiado los detectores de QRS.

El número de funciones usado es $N=5$. Los valores de las μ fueron: $\mu_1 = 0.75$ y $\mu_2 = 10^{-8}$, los pesos se inicializaron a cero $w_{n0} = 0$, mientras que el parámetro b lo fue a 25 ms ($b_0 = 25$ ms). El origen temporal de las $\Phi_n(t, b)$ está en la posición central de la ventana, dado por el detector de QRS. Los valores de w_n y b superpuestos en la gráfica corresponden al final de la adaptación de las 10 recurrencias consideradas. Puede comprobarse en dicha figura que las 5 funciones de Hermite consideradas representan más del 90% de la energía de la señal. Las unidades del error relativo ($Rmse$) están dadas relativas a la energía de la señal, definiéndolo como

$$Rmse = \frac{\xi L}{SE} \cdot 100. \quad (6.175)$$

El valor de SE puede obtenerse del propio QRS, y en este caso ξ puede ser calculado de la diferencia entre el QRS y su reconstrucción después de procesar un número de recurrencias A . Con esta definición, $Rmse$ representa el tanto por ciento de energía de señal sin representar.

Se puede observar cómo el QRS1 presenta una b mayor (18.4 ms) frente a la del QRS2 (16.8 ms). Este resultado está de acuerdo con el efecto visual respecto a la anchura relativa de ambos QRS. Por otra parte, las diferencias relativas entre las componentes w_1 y w_2 en ambos QRS también resultan evidentes, de acuerdo con la morfología de éstos y la de las funciones asociadas a los pesos (Φ_1, Φ_2). El QRS1 tiene mayor componente en Φ_1 respecto a Φ_2 , mientras que en el QRS2 es al revés. También se observa en w_n que las componentes más significativas son las de menor orden n .

Convergencia de los pesos.

De acuerdo con el algoritmo LMS, previamente estudiado en 6.2.3, resulta:

$$\mu_1 < \frac{L}{3N}. \quad (6.176)$$

En este caso $L=400$ y $N=5$, y por tanto, se debe cumplir $\mu_1 < 26.6$. El valor de μ_1 que se ha usado en este ejemplo es 0.75, que cumple sobradamente la condición de convergencia. En cuanto al tiempo de convergencia, de las ecuaciones 6.38 y 6.62 se obtiene que

$$\tau_{mse} = \frac{L}{4\mu_1} = 133.3 \text{ muestras} \simeq 1.3 \text{ recurrencias (QRS)} \quad (6.177)$$

y

$$\tau_{w_i} = \frac{L}{2\mu_1} = 266.6 \text{ muestras} \simeq 2.6 \text{ recurrencias (QRS)}. \quad (6.178)$$

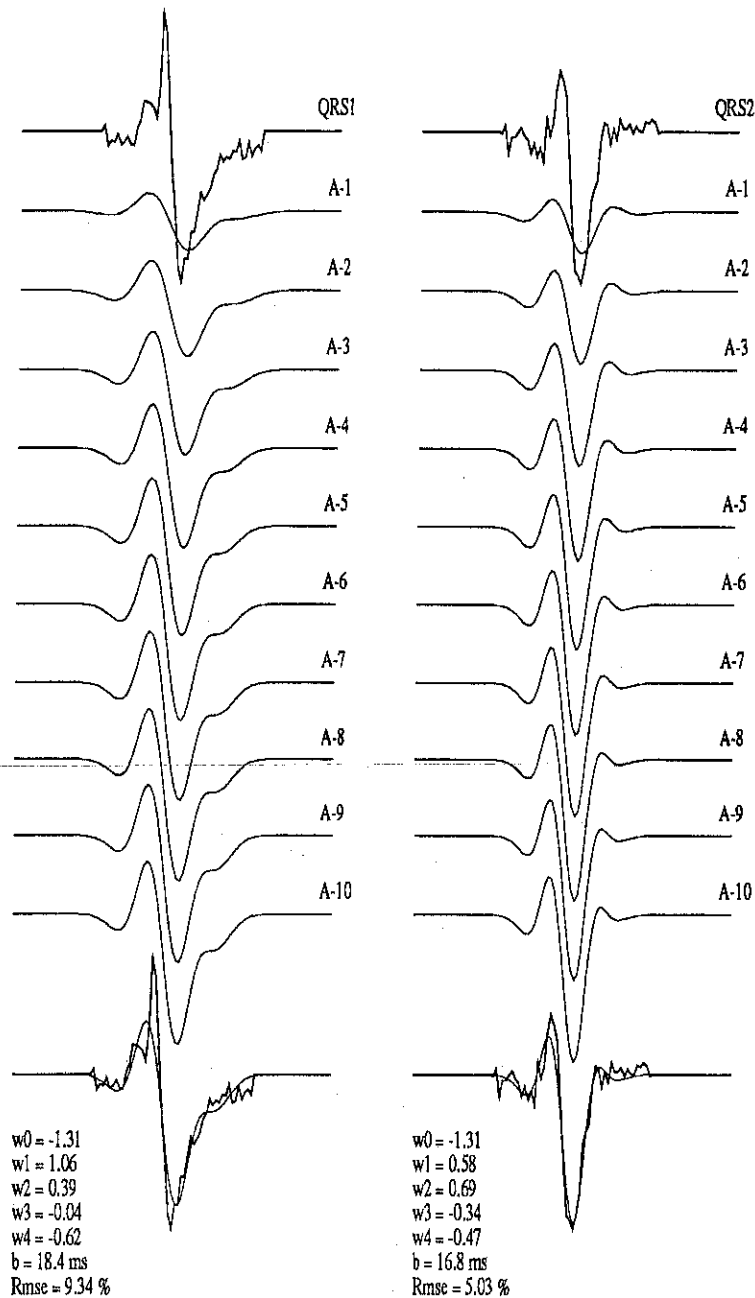


Figura 6.7: Estimación con constancia de forma.

En esta figura se presenta en la parte superior el QRS original, y debajo la señal estimada reconstruida con los pesos w_n y el valor de b después de finalizar la adaptación en cada una de las 10 primeras recurrencias del QRS (A-n). La parte inferior representa superpuestas el QRS original y el reconstruido después de procesadas las 10 recurrencias.

En la figura 6.8 se ve la evolución de los pesos al final de cada adaptación en el QRS1. Se comprueba cómo efectivamente después de la tercera recurrencia ya todos

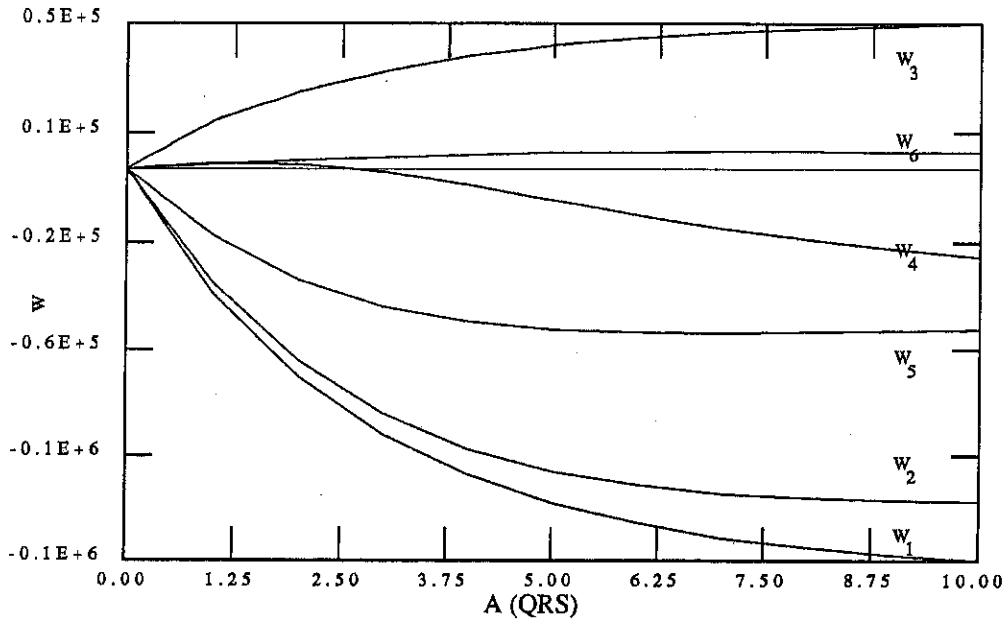


Figura 6.8: Convergencia de los pesos según el número de recurrencias A procesadas para el caso del QRS1.

los pesos han convergido a más del 60% de un valor final, y que la forma de caída es exponencial.

En la figura 6.9 se ve la evolución del $Rmse$. También puede observarse cómo la convergencia es más rápida en un factor 2 que en el caso de los pesos. Después de la segunda recurrencia ya ha caído a un 60% del valor final. Tanto en esta figura como en la anterior, los datos son discretos con cada valor entero de A , pero para dar continuidad a la gráfica se han unido según una línea recta.

Convergencia del parámetro b .

Si se intenta comprobar la condición de convergencia obtenida para μ_2 (ecuación 6.170) se debe calcular el valor de SE . En el caso del QRS1 se tiene que

$$L = 400 \quad , \quad b^* = 18 \quad y \quad SE = 1.25 \cdot 10^{10} . \quad (6.179)$$

Sustituyendo se obtiene una cota para μ_2 , tal que se debe cumplir $\mu_2 < 1.04 \cdot 10^{-6}$. En efecto, se comprueba experimentalmente que en el caso del QRS1 μ_2 debe ser menor

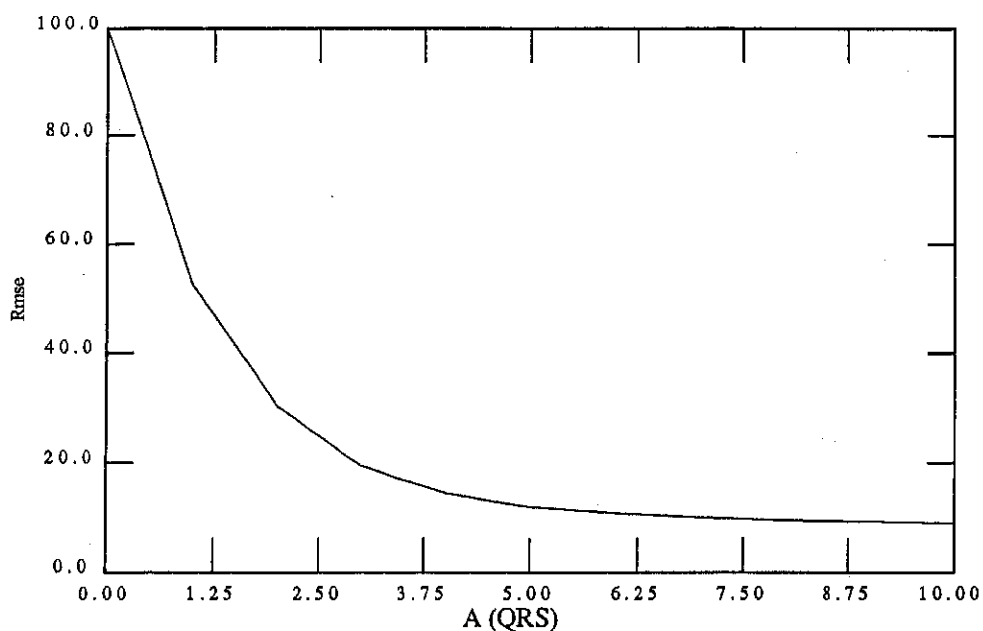


Figura 6.9: Convergencia del error $Rmse$ según el número de recurrencias A procesadas para el caso del QRS1.

que este valor, y de hecho se ha tomado un valor $\mu_2 = 10^{-8}$ para evitar encontrarse en el límite de convergencia, dadas las aproximaciones en la deducción de la cota. El tiempo de convergencia estimado para la b será de

$$\tau_b \simeq \frac{L b^{*2}}{\mu_2 SE} = 1036.8 \text{ muestras} \simeq 10 \text{ QRS} . \quad (6.180)$$

Este tiempo supone unas 10 recurrencias de la señal. En la figura 6.10 se ve la evolución del valor de b al final de cada una de las 10 recurrencias procesadas. Puede observarse cómo después de la cuarta recurrencia el valor de b ya, prácticamente, ha convergido.

Estos resultados revelan el hecho de que en la deducción teórica se han realizado aproximaciones, de modo que las expresiones obtenidas sólo proporcionan una estimación del orden de magnitud y no un valor preciso. Sin embargo, estos resultados teóricos son de gran utilidad en el diseño de estos sistemas.

Estimación en otras morfologías.

En la figura 6.11 se presentan algunos patrones diferentes de QRS reales, modelados con 5 funciones y después de adaptar 10 recurrencias ($A=10$). Nuevamente se comprueba cómo la forma fundamental es bien recuperada en todos los casos.

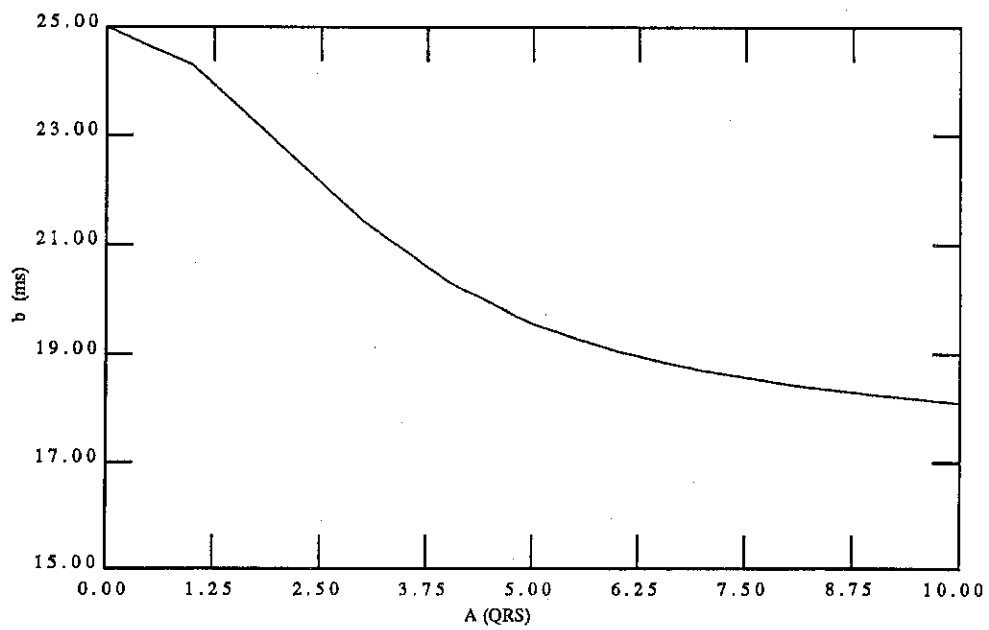


Figura 6.10: Convergencia del parámetro b según el número de recurrencias A procesadas para el caso del QRS1.

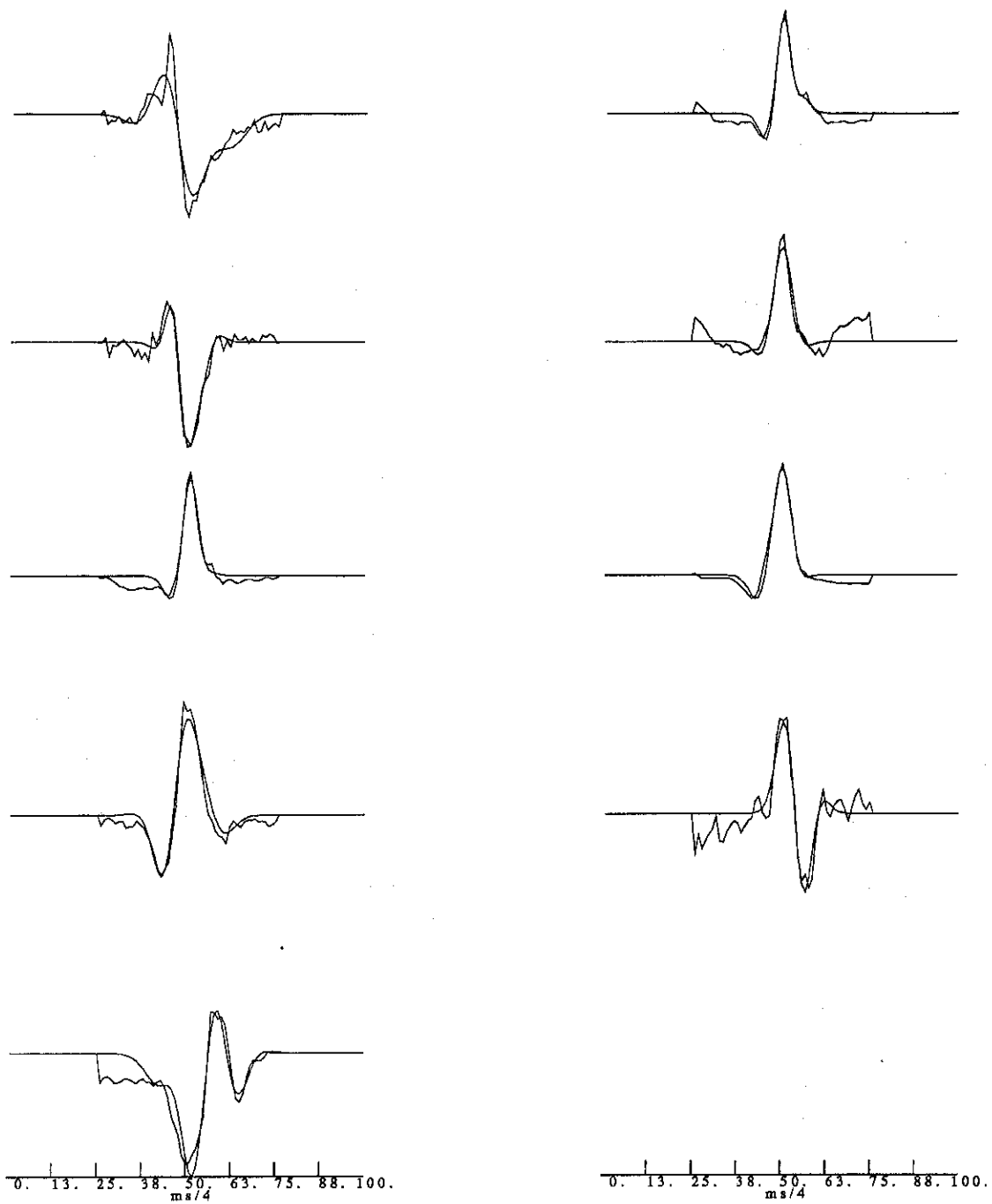


Figura 6.11: Ocho diferentes patrones de QRS superpuestos con su estimación según el modelo de Hermite con las 5 primeras funciones y mismo QRS en cada recurrencia.

6.4.4.2 Estimación con diferente número (N), de funciones de Hermite

Para comprobar el efecto del número de funciones (N) se ha considerado la secuencia de QRS1 antes estudiada durante 10 recurrencias y se han usado valores de N desde 1 hasta 10. En la figura 6.12 se ve la recuperación de la señal en cada caso y el $Rmse$ obtenido al final de adaptar las 10 recurrencias. Los parámetros del algoritmo y su inicialización fueron los mismos que en los casos anteriores.

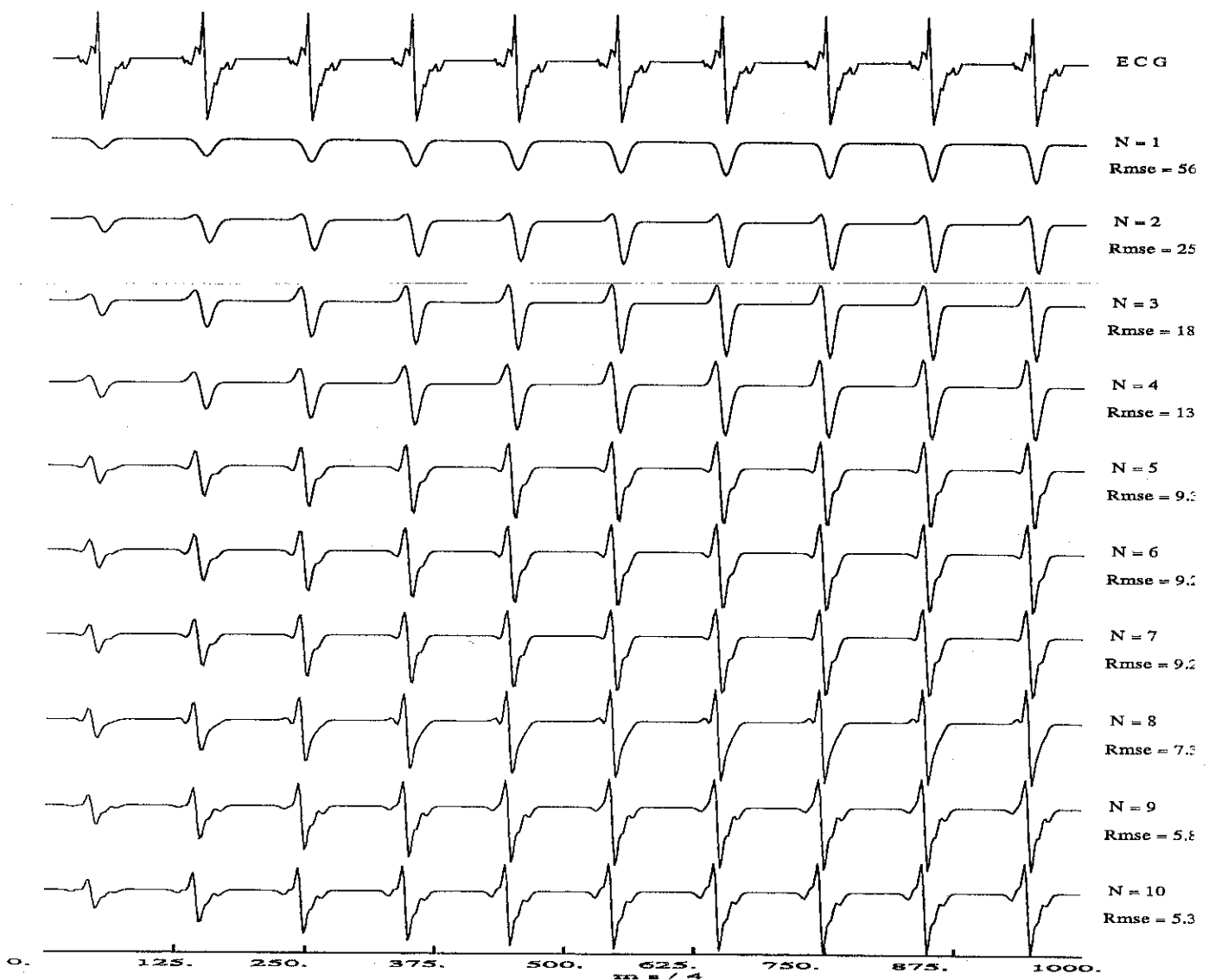


Figura 6.12: Estimación de QRS1 con diferente número de pesos N.

Nótese cómo con $N=4$ ya se tiene prácticamente el 90% de la energía modelada, y que el incremento de N no supone aumentar significativamente la energía recogida, si bien es cierto que detalles de más alta frecuencia quedan mejor modelados con un N alto. Esto es lógico si se observa que $\Phi_n(t, b)$ presentan oscilaciones de mayor frecuencia a medida que aumenta el índice n .

6.4.4.3 Estimación con una secuencia real de QRS

Hasta este momento las estimaciones se han realizado sobre una secuencia de un mismo QRS repetido A veces. Ahora se va a considerar una secuencia real de complejos QRS pertenecientes a un paciente determinado. En la figura 6.13 se presentan los primeros 10 QRS de esta secuencia y debajo su reproducción con los pesos al final de cada recurrencia. Las condiciones de la adaptación son como en los casos anteriores, sincronizándose la adaptación en el centro de la ventana.

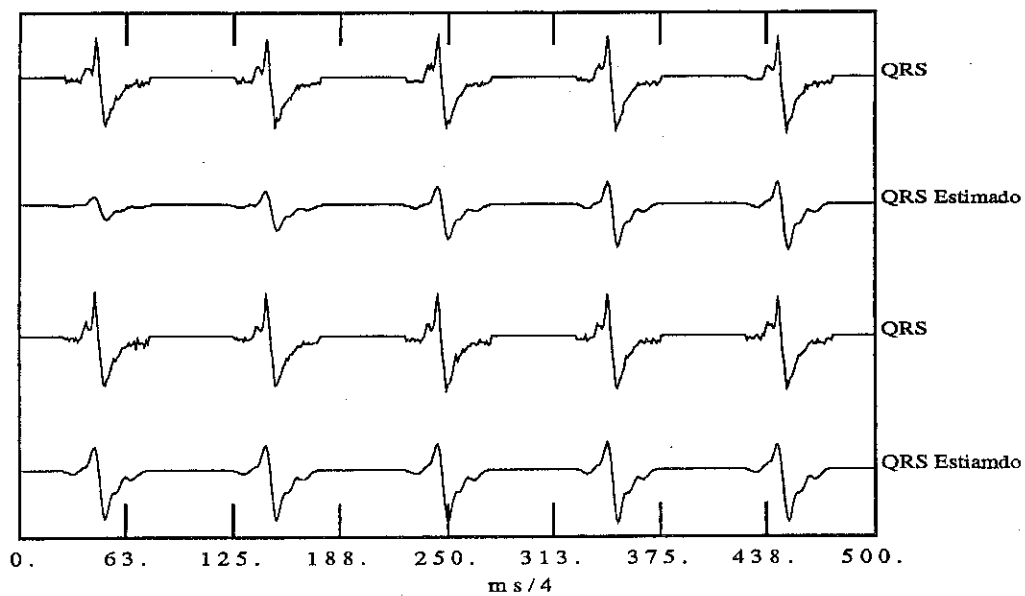


Figura 6.13: Estimación de la forma del QRS en una secuencia real.

6.4.4.4 Detección de QRS ectópicos

Se va a plantear ahora una secuencia real de complejos QRS, que incluye uno asociado a un latido ectópico en la quinta recurrencia. Se trata de comprobar si el parámetro b

es capaz de discernir por sí solo los QRS normales de los ectópicos. Por otro lado, el conjunto de N pesos w_n ($n=0, 1, \dots, N-1$) pueden considerarse características de un espacio N dimensional que servirán para clasificar los QRS.

En los casos anteriores se ha tomado un valor de μ_1 muy restrictivo respecto al límite de convergencia (0.75 frente a 26.6). De este modo se garantizaba un menor error en estado estacionario, pero la convergencia era más lenta (en torno a 2.5 realizaciones para el vector de pesos). En la aplicación que se plantea ahora interesa que la convergencia se produzca, si es posible, en una recurrencia o menos, para así poder caracterizar formas de QRS que sólo aparezcan una vez en la secuencia. Con este criterio y tomando un $\mu_1=3.4$, se obtiene un tiempo de convergencia para ξ de aproximadamente 0.3 recurrencias (ecuación 6.62). El valor de μ_2 sigue siendo el mismo, ya que todas las secuencias de QRS han sido normalizadas, de modo que la primera realización de todas ellas tenga el mismo valor máximo de señal. Así, el valor de SE será comparable en todas las secuencias y la condición de convergencia de b se mantendrá constante.

En la figura 6.14 se representa la secuencia de nueve complejos QRS con el ectópico en la quinta recurrencia. Se muestra el valor de b en la recurrencia anterior, posterior y la propia del QRS ectópico. Los valores son 24 , 23 y 35 ms, respectivamente. Esto comprueba que el valor de b es efectivo para detectar latidos ectópicos, aunque sólo aparezcan una vez en la secuencia.

Dada la morfología de este QRS, el punto de sincronismo se ha desplazado 20 ms a la derecha del centro de la ventana. Se observa cómo la reconstrucción de la señal en cada recurrencia permite latido a latido recuperar su forma original y, por tanto, los pesos w_n son características apropiadas para la clasificación. Nótese cómo, dada la gran diferencia de forma entre el QRS ectópico y el siguiente, este último presenta mayor error en la recuperación que los demás no ectópicos. Esto es debido a la mayor distancia que deben cubrir los pesos al cambiar la recurrencia del QRS ectópico a una normal. En este caso el error es mayor incluso que en la primera recurrencia. Analizando los pesos (w_3) en la primera recurrencia w_3 pasa de valer 0 (condiciones iniciales) a -85047 y en la secuencia normal-ectópico-normal (cuarto, quinto, sexto), w_3 vale -72974, 102352 y -55940, respectivamente. Se comprueba pues que los pesos son capaces de recuperar la forma latido a latido, si bien cuando los cambios son muy bruscos (ectópicos) la recuperación es proporcional a la distancia que separa a los

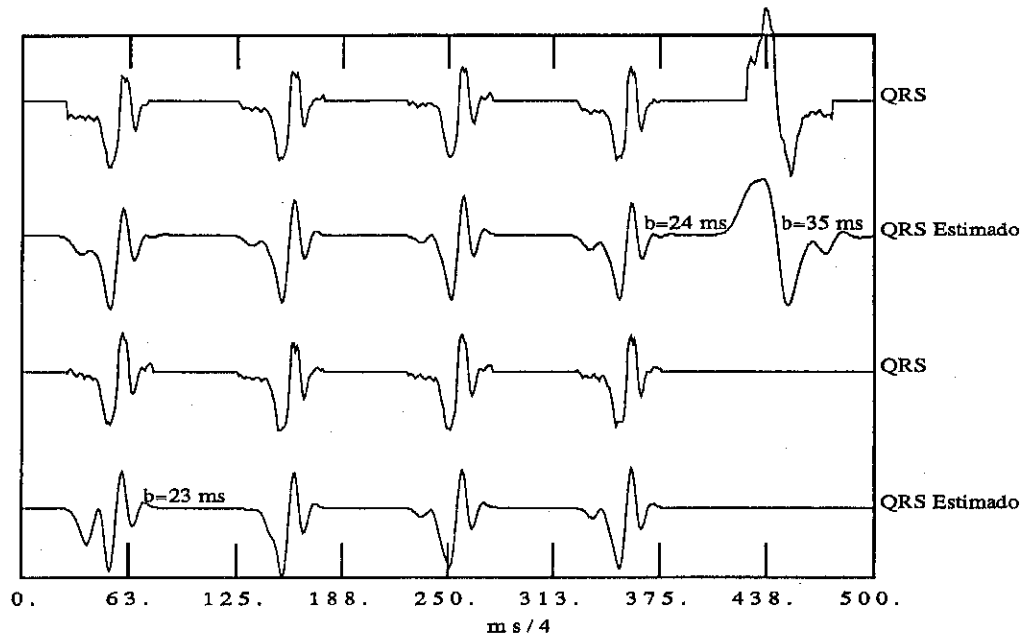


Figura 6.14: *Detección de QRS ectópicos aislados.*

diferentes QRS, entendiendo por distancia la diferencia de valor de los pesos en cada caso. Esto está de acuerdo con la definición de tiempo de convergencia como aquél que tardan los pesos en variar un determinado tanto por ciento entre la diferencia de su valor inicial y final. Por tanto, si esta diferencia es mayor, lo que falta por recorrer después del mismo tiempo de convergencia para diferentes casos también lo es.

6.4.4.5 Clasificación de la forma de los QRS

En este último ejemplo se va a considerar una secuencia de complejos QRS que presenta variaciones de forma periódicas latido a latido. Este fenómeno se conoce con el nombre de bigeminismo. En este caso se tienen 10 complejos QRS que básicamente pertenecen a dos formas diferentes y que aparecen alternativamente. El planteamiento es exactamente igual al anterior para que la convergencia se de en un latido. En la figura 6.15 se presentan los resultados de forma análoga a los casos previos. El valor de b permanece sin una gran variación en la alternancia de QRS (por ejemplo en las recurrencias de la sexta a la décima b vale 27.8, 26.5, 26.8 27.1 y 27.4 ms), y por tanto no parece un parámetro idóneo para clasificar y separar los dos tipos de QRS presentes. Sin embargo, el valor de los pesos w_n si es capaz de seguir las variaciones de forma, tal y como puede comprobarse inspeccionando la recuperación de forma

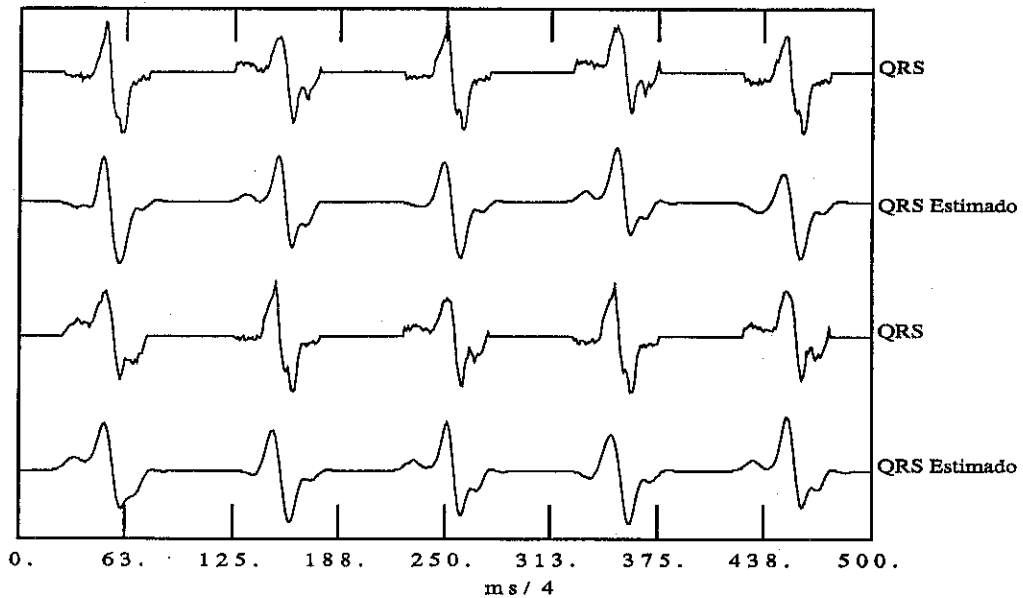


Figura 6.15: *Estimación de la forma variable de QRS en caso de bigeminismo.*

en en la figura 6.15. A modo de ejemplo se enumeran los valores de w_1 en las cinco últimas recurrencias: por orden secuencial de la sexta a la décima recurrencia se tiene que w_1 vale 11205, -56008, 2490, -64493 y 34644. Resulta evidente que este parámetro, y mejor el conjunto de todos los w_n , son unas características adecuadas para la clasificación de estos QRS en sus dos formas básicas.

6.5 Filtrado adaptativo de señales unidas a un impulso (ECG)

En este apartado se propone otra aplicación práctica del sistema de procesado adaptativo descrito en 6.3. En este caso, se obtiene un filtro adaptativo tomando como salida del modelo la señal y_k , y como entradas de referencia una base de funciones impulso. Este filtro adaptativo puede ser aplicado a cualquier tipo de señal que se genere de forma recursiva con un cierto estímulo. El filtro aprende la parte determinista de la señal y elimina el ruido presente en ella y, no correlado con el impulso ni, por tanto, con la señal determinista.

Se analizan las expresiones que reflejan el comportamiento del filtro con estas

entradas de referencia, y se presenta un tratamiento equivalente de este filtro desde el punto de vista del promediado ponderado, así como una configuración funcionalmente equivalente pero de más fácil realización. El filtro se aplica a la detección de PVT, comparándose su comportamiento con el promediado de señal que es la técnica más clásica de detección de estos potenciales. Para comprobar el comportamiento del filtro se consideran señales reales con ruido añadido y con una determinada SNR, y se analiza la recuperación de la señal original mediante este filtrado. También se toma una secuencia real de ECG en la zona post-QRS y se estudia la recuperación de los PVT en función del valor de μ utilizado. En todos los casos se comparan los resultados de este filtro con los obtenidos mediante promediado clásico de señal.

6.5.1 El filtro adaptativo

El esquema es el mismo de la figura 6.2, y las entradas de referencia b_{ik} consideradas en el primer intervalo de definición de la señal ($k=1, \dots, k=L$) tienen la expresión

$$b_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad (6.181)$$

Esto es, las funciones valen 1 en un instante de muestreo y cero en los demás, y se repiten periódicamente con cada recurrencia. Si el número de funciones b_{ik} consideradas es L , es decir, el índice entero i varía de $i=1$ a $i=L$, el conjunto de funciones b_{ik} constituye una base en el espacio de funciones discretas definidas en el intervalo discreto $[1, \dots, L]$. Por tanto, toda la energía de la señal determinista podrá ser modelada en esta base. En la figura 6.16 se representan las funciones b_{ik} , entradas de referencia del filtro.

Analizando las expresiones de adaptación con las funciones b_{ik} , y dado que en este caso $N=L$, se observa que la señal determinista s_k en la primera recurrencia puede ser expresada como

$$s_k = \sum_{i=1}^L c_i b_{ik} = c_k, \quad (6.182)$$

es decir, es equivalente a considerar secuencialmente los coeficientes de la señal en cada uno de los b_{ik} elementos de la base. El índice k por conveniencia se considera que se reinicializa a $k=0$ al final de cada recurrencia. Cuando sea necesario especificar

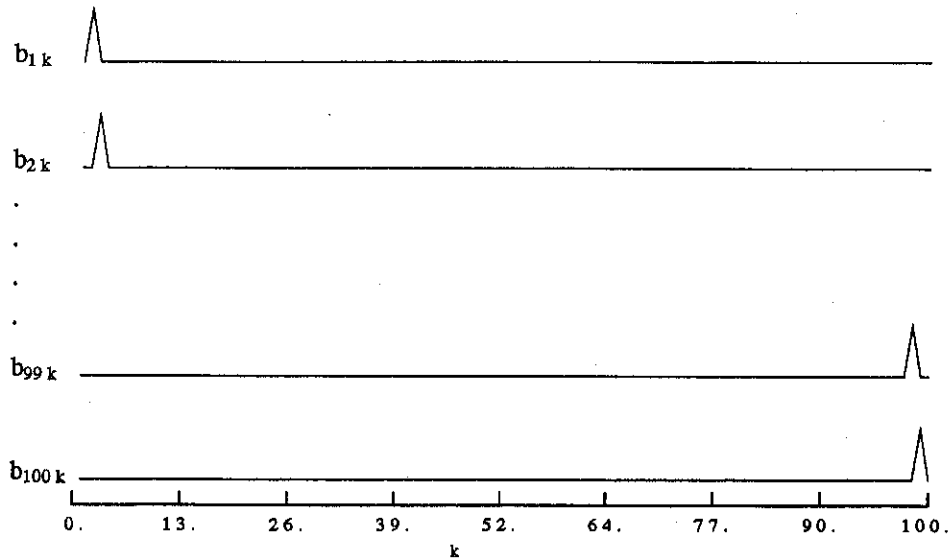


Figura 6.16: Funciones impulso b_{ik} que actúan de entradas de referencia en el filtro adaptativo para señales definidas en un intervalo de L muestras ($L = 100$).

la recurrencia se añadirá otra variable adicional, así $y_k(m)$ denotará la muestra k en la recurrencia m , y $w_{ik}(m)$ denotará el peso i en el instante k de la recurrencia m . Sin embargo, s_k , w_i^* y b_{ik} no dependen de la recurrencia m . Por otra parte, y de la ecuación 6.56, se deduce que:

$$y_k(m) = \sum_{i=1}^L w_{ik}(m)b_{ik} = w_{kk}(m), \quad (6.183)$$

es decir, la señal de salida es el propio vector de pesos expresado de forma secuencial. En la situación de mínimo error cuadrático medio:

$$y_k(m) = w_k^* = c_k = s_k, \quad (6.184)$$

Esto significa que el vector de pesos considerado como señal es una estimación de s_k , y por tanto, el sistema es un filtro adaptativo que elimina la parte de señal no correlada con el impulso (ruido).

La forma del filtro es totalmente equivalente a considerar una única entrada de referencia B_k que sea un impulso unidad y que actúe según el esquema de la figura 6.17. Esta única entrada es tal que mediante retardos unitarios z^{-1} actúa sobre cada uno de

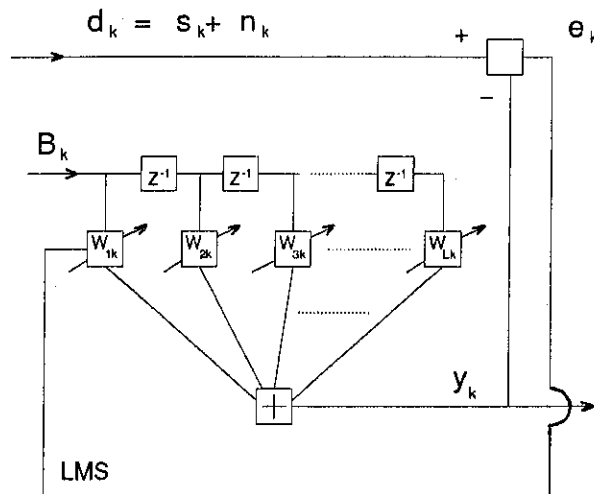


Figura 6.17: Esquema del filtro adaptativo realizado con una sola entrada impulsional.

los pesos w_i . La expresión de esta entrada de referencia en la primera recurrencia vale

$$B_k = \begin{cases} 1 & k = 1 \\ 0 & k = 2, \dots, L \end{cases} \quad (6.185)$$

La expresión de las matrices \mathbf{R} y \mathbf{P} son las mismas que con el planteamiento primero. La ventaja de este esquema alternativo se muestra desde el punto de vista de la realización práctica (sólo una señal de referencia), ya que funcionalmente resultan iguales.

El filtro aquí descrito está constituido por el sistema adaptativo estudiado en este capítulo, con las entradas de referencia formando una base. Por tanto son válidas las expresiones deducidas para la mejora de la SNR en estado estacionario y en un número de recurrencias arbitrario: $\Delta SNR^{ss} = 1/\mu$.

6.5.2 El filtro adaptativo como promediado ponderado

Si se analiza en detalle el filtro, puede comprobarse cómo la salida y_k , después de un determinado número A de recurrencias, es equivalente a un promediado, ponderado con un factor de olvido que multiplica a la realización de señal correspondiente a cada recurrencia. Este factor es tanto menor cuanto mayor es el número de recurrencias transcurridas entre la última y la que se está considerando en el promediado. Este diferente modo de estudiar el filtro revela de nuevo el hecho de que se recuperan y

adaptan las nuevas situaciones, más favorecidas en el proceso de ponderación. Por contra, las situaciones pasadas son cada vez menos influyentes en la estimación actual, pues quedan más alejadas por el mayor número de recurrencias habidas desde entonces hasta la actualidad.

Para comprobar este hecho se hace uso de la ecuación vectorial 6.26, considerando un elemento i de la igualdad vectorial

$$w_{i\ k+1} = w_{i\ k} + 2\mu e_k X_{i\ k} . \quad (6.186)$$

En adelante, y como ya se ha comentado previamente, el parámetro k , que siempre se ha considerado como el índice de tiempo discreto que se extiende de $k=1$ a ∞ , será usado como el índice temporal discreto dentro de cada realización m ($k=1, \dots, L$). De esta forma puede identificarse con el índice de los pesos y elementos de la base. Cuando se haga referencia a instantes en diferentes realizaciones m las señales se denotarán como $d_k(m)$, $y_k(m)$, ..., en el entendido que se refiere a la muestra k de la realización m . Como s_k y b_{ik} en principio no dependen de m , se obviará esta dependencia en estas dos señales. En el caso de los pesos se denotarán como $w_{i\ k}(m)$, pero como se va a comprobar seguidamente $w_{i\ k}(m)$ sólo cambian de valor en una recurrencia cuando $i=k$, y entonces se denotarán por $w_i(m)$, indicando el peso i en la recurrencia m .

Sustituyendo el error e_k y la señal $X_{i\ k}$ por su valor, resulta

$$w_{i\ (k+1)}(m) = w_{i\ k}(m) + 2\mu (d_k(m) - y_k(m)) b_{i\ k} . \quad (6.187)$$

De acuerdo con (6.183), $y_k(m) = w_{kk}(m)$; por otra parte, $b_{i\ k}$ es distinta de cero sólo para $i=k$. Por tanto, la actualización de cada peso i sólo se realizará una vez en cada recurrencia m cuando $i = k$. Expresando la relación de adaptación en función de m , y denotando por $w_i(m)$ al peso i en la recurrencia m (ya que su valor cambia sólo una vez por recurrencia), resulta:

$$w_i(m+1) = w_i(m) + 2\mu (d_i(m) - w_i(m)) , \quad (6.188)$$

donde i representa la muestra dentro de la recurrencia m (caso de $d_i(m)$) y el índice del peso que se considera ($w_i(m)$). En este caso coinciden, dadas las características de las funciones que actúan de entrada de referencia. El índice i permanece constante y es la m la que varía en cada recurrencia. En este filtro queda independizado el estudio de la señal como un conjunto de muestras, en el estudio de la señal mediante las muestras

equivalentes de cada recurrencia ($d_i(m)$). Nótese cómo cada peso i ahora está asociado a la muestra $k = i$ del intervalo de definición de la señal, y sólo estas muestras actúan sobre él. Esta es una consecuencia inmediata de la base de impulsos considerada.

Expresando esta relación recursiva de forma continua en función del peso i en el instante inicial, que se supondrá inicializado a cero ($w_i(0) = 0$), resulta

$$w_i(A + 1) = \sum_{m=1}^A 2\mu(1 - 2\mu)^{A-m} d_i(m), \quad (6.189)$$

y como $y_i(m) = w_i(m)$ se obtiene

$$y_k(A + 1) = \sum_{m=1}^A 2\mu(1 - 2\mu)^{A-m} d_k(m). \quad (6.190)$$

Por conveniencia se ha cambiado el índice i por el k , ya que ahora ha quedado todo referido a muestras y k es el índice usado para ellas en todo el capítulo.

De acuerdo con esta expresión, $y_k(A)$ es un promediado ponderado de las muestras k de cada recurrencia m . El factor de ponderación $2\mu(1 - 2\mu)^{A-m}$ es tanto menor cuanto mayor sea $A-m$ (distancia entre la recurrencia actual A y la m) siempre y cuando $|1 - 2\mu| < 1$ (se recupera la condición de convergencia del formalismo adaptativo). La puesta en práctica, para cada valor de A , de este promediado según la expresión para $y_k(A + 1)$ requeriría un número creciente de cálculos, que aumentarían linealmente con el valor de A . El formalismo adaptativo permite una realización mucho más eficiente, junto con el conocimiento de las propiedades de este promediado ponderado a través de las propiedades del sistema adaptativo.

Para comprobar que efectivamente este promediado ponderado converge al valor de la componente determinista s_k , se puede tomar el valor esperado de 6.190 para cada muestra, obteniéndose

$$E[y_k(A + 1)] = \sum_{m=1}^A 2\mu(1 - 2\mu)^{A-m} E[d_k(m)], \quad (6.191)$$

y teniendo en cuenta que $d_k(m) = s_k + n_k(m)$ (s_k no depende de m):

$$E[y_k(A + 1)] = 2\mu s_k \sum_{m=1}^A (1 - 2\mu)^{A-m}. \quad (6.192)$$

Esta expresión es una progresión geométrica que puede expresarse como

$$E[y_k(A + 1)] = 2\mu s_k \frac{1 - (1 - 2\mu)^A}{1 - (1 - 2\mu)}, \quad (6.193)$$

y si se cumple la condición de convergencia

$$E[y_k(\infty)] = s_k, \quad (6.194)$$

es decir, el promediado ponderado cuando el número de recurrencias es suficientemente grande converge hacia la señal determinista. Este resultado es también el ya obtenido con el formalismo adaptativo.

Para terminar con el estudio comparativo de los dos formalismos, se deducirá la mejora de la SNR desde este punto de vista. Para ello se toma 6.190 y se sustituye $d_k(m)$ en función de s_k y del ruido $n_k(m)$, con lo cual

$$y_k(A+1) = \sum_{m=1}^A 2\mu(1-2\mu)^{A-m}(s_k + n_k(m)) = s'_k(A+1) + n'_k(A+1), \quad (6.195)$$

donde

$$n'_k(A+1) = \sum_{m=1}^A 2\mu(1-2\mu)^{A-m}n_k(m), \quad (6.196)$$

y

$$s'_k(A+1) = \sum_{m=1}^A 2\mu(1-2\mu)^{A-m}s_k = 2\mu \frac{1-(1-2\mu)^A}{1-(1-2\mu)} s_k. \quad (6.197)$$

Retomando la definición de SNR_y y considerando los valores esperados ya no en cada muestra sino en toda la señal, se obtiene que

$$SNR_y = \frac{E[s'_k{}^2(A+1)]}{E[n'_k{}^2(A+1)]} = \frac{4\mu^2 (1-(1-2\mu)^A)^2 (1-(1-2\mu)^2) E[s_k^2]}{4\mu^2 (1-(1-2\mu))^2 (1-(1-2\mu)^{2A}) E[n_k^2]}, \quad (6.198)$$

y calculando ΔSNR_y

$$\Delta SNR_y = \frac{1-\mu (1-(1-2\mu)^A)^2}{\mu (1-(1-2\mu)^{2A})}. \quad (6.199)$$

Esta expresión es la misma que 6.123, salvo por el factor $(1-\mu)$. Esta derivación de la SNR_y es exacta, ya que no se ha realizado ninguna aproximación; sin embargo, en 6.123 se usó el valor del desajuste $M = \mu \text{tr}[\mathbf{R}]$ para el algoritmo LMS, que intrínsecamente incluye la aproximación de $\mu \ll 1$ (Widrow, 1985). Si se considera ahora la misma aproximación se obtiene idéntica expresión para SNR_y que la deducida mediante el formalismo adaptativo. En el caso estacionario ($A \rightarrow \infty$) se tendrá

$$\Delta SNR_y = \frac{1-\mu}{\mu} \quad (6.200)$$

Calculando M ahora a partir de 6.19 y de 6.20, se obtiene que

$$M = \frac{\mu}{1 - \mu}. \quad (6.201)$$

Este es un cálculo exacto del desajuste M que coincide con el aproximado según Widrow (1985) cuando $\mu \ll 1$.

6.5.3 Aplicación al ECG de alta resolución

El estudio de señales cardiacas de baja amplitud inmersas en el ECG (electrocardiografía de alta resolución) representa una ventaja importante en el diagnóstico cardiológico no invasivo. En particular, los PVT que se presentan en la zona post-QRS (parte final del complejo QRS y segmento ST) son de gran interés clínico y por tanto un método que permita la correcta estimación de estos potenciales será de gran utilidad.

El promediado clásico de señal es la técnica más comúnmente usada para mejorar la SNR de los potenciales de baja amplitud. Sus limitaciones son debidas a errores en la definición de los WOT sobre la onda en que se encuentran los potenciales. Estos errores ocasionan un efecto de filtrado paso bajo que en general no es deseable. Además en casos de señales con variaciones dinámicas de la señal, el promediado clásico no es capaz de evidenciarlas.

El filtro adaptativo anteriormente propuesto puede usarse para el enfatizado de este tipo de potenciales, ya que están ligados temporalmente a algunas de las ondas del ECG (en concreto los PVT lo están al complejo QRS). De este modo, generando un impulso coincidente con el WOT de la onda en cuestión podrá aplicarse este filtro y será posible evidenciar cambios dinámicos en la forma de estos potenciales, cosa que no es posible realizar mediante promediado clásico de señal. En efecto, si la componente determinista s_k cambia a s_k'' , el filtro se encuentra en situación de condiciones iniciales correspondientes a la antigua componente determinista s_k y tenderá a converger a la nueva componente s_k'' , según las leyes ya estudiadas.

Otro esquema adaptativo para la obtención y filtrado de PVT ha sido propuesto por Al-Nashash y otros (1989), tomando como única entrada de referencia la propia señal en estudio retardada una cierta distancia temporal fija. De este modo se elimina el ruido cuya función de autocorrelación decae rápidamente con el tiempo pero no el ruido del

tipo de interferencias de 50/60 Hz en que ésto no ocurre. El esquema (filtro) propuesto en este capítulo presenta la ventaja respecto al anteriormente comentado de que elimina todo el ruido no correlado con la señal, y por tanto, también las interferencias de 50/60 Hz.

Para comprobar la validez de este filtro actuando sobre PVT se presenta un estudio en simulación usando un QRS real, con componente determinista constante, y otro con dicha componente variable. De este modo se comprobará la eficacia del filtro para seguir variaciones de forma. Por último se considera una aplicación a la detección de PVT en una secuencia real de complejos QRS.

6.5.3.1 Estudio en simulación

En primer lugar se ha considerado una secuencia de recurrencias compuestas por un mismo complejo QRS, que representa la componente determinista s_k , al que se le ha añadido ruido blanco, Gaussiano y de media cero con una determinada SNR. El intervalo de definición de la señal es de 200 ms de duración, y se muestrea a 1kHz, lo cual hace que $L=200$ muestras (en este caso las funciones b_{ik} son realmente ortonormales y L está medido en muestras). Las señales impulso han sido generadas con la aparición de cada recurrencia y con total precisión, dada la forma de construcción de las recurrencias. El filtro fue aplicado con diversos valores de μ y para diferentes SNR.

En la figura 6.18 se presentan los resultados con la señal recuperada después de un número (A) de recurrencias para $SNR = 20$ dB. En la parte superior está la componente determinista s_k a estimar (la misma en todas las recurrencias), en la segunda fila se encuentran las recurrencias A de señal $d_k(A)$ con la misma SNR_d . La tercera fila muestra la señal estimada por medio del promediado clásico (ave) después de las A recurrencias. En las filas sucesivas se encuentran las señales $y_k(A)$ estimadas después de A recurrencias para distintos valores del parámetro μ .

En la figura 6.19 se muestran los resultados correspondientes a una $SNR_d = 10$ dB

Los valores calculados para ΔSNR_y (ecuación 6.122) están de acuerdo con el estudio en simulación donde se obtienen valores de ΔSNR_y entorno a 100 para

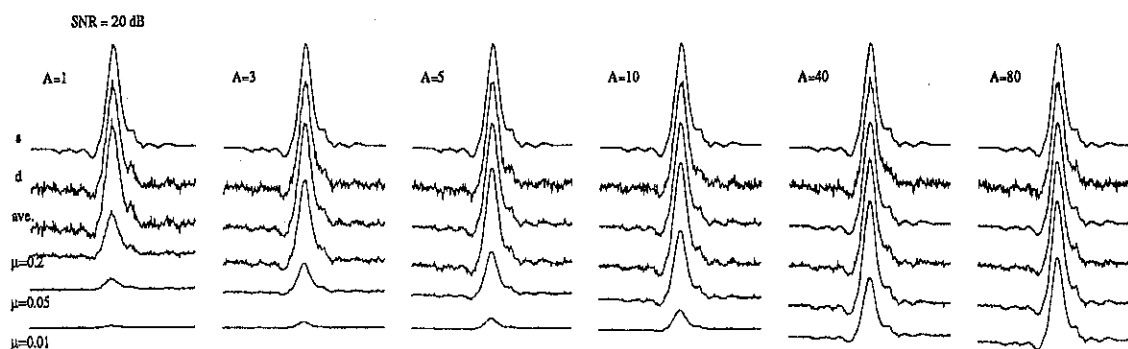


Figura 6.18: Resultados para 80 recurrencias ($d_k(m)$) con la misma componente determinista (s_k). $SNR_d = 20$ dB.

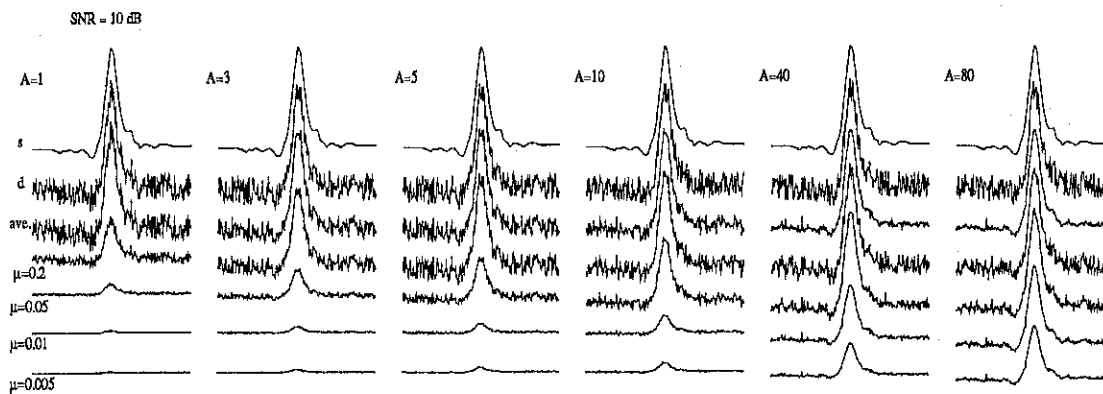


Figura 6.19: Resultados para 80 recurrencias ($d_k(m)$) con la misma componente determinista (s_k). $SNR_d = 10$ dB.

$\mu = 0.01$, según la secuencia de ruido y lo mejor o peor que ésta se aproxima al ruido ideal. El tiempo teórico de convergencia para $\mu = 0.2$ es de $\tau_{mse} \simeq 1$ recurrencias, lo que es fácil de comprobar que se verifica por simple inspección de la gráfica: después de la tercera recurrencia prácticamente toda la energía de la señal está recuperada. En estos casos el filtro adaptativo y el promediado clásico obtienen resultados similares. Si bien, dada la constancia de forma y el sincronismo perfecto, el promediado obtendrá una mejora $\Delta SNR_y = A$ que aumenta indefinidamente (6.124), mientras que el filtro adaptativo satura a un valor $\Delta SNR_y = \frac{1-\mu}{\mu}$ (6.200). En la figura 6.3 pueden observarse ambas mejoras.

Un caso más interesante se produce cuando la señal presenta un cambio en la componente determinista s_k . La figura 6.20 muestra un caso análogo a las figuras anteriores, pero donde aparece un cambio brusco en la señal determinista en la recurrencia 80 y s_k se transforma en s_k'' para las recurrencias de la 81 a la 160. En este caso, el filtro adaptativo consigue mejor recuperación que el promediado clásico, debido a que éste aprende la nueva señal determinista s_k'' . Esto puede observarse comparando los resultados del promediado y filtrado adaptativo después de 120 o 160 recurrencias.

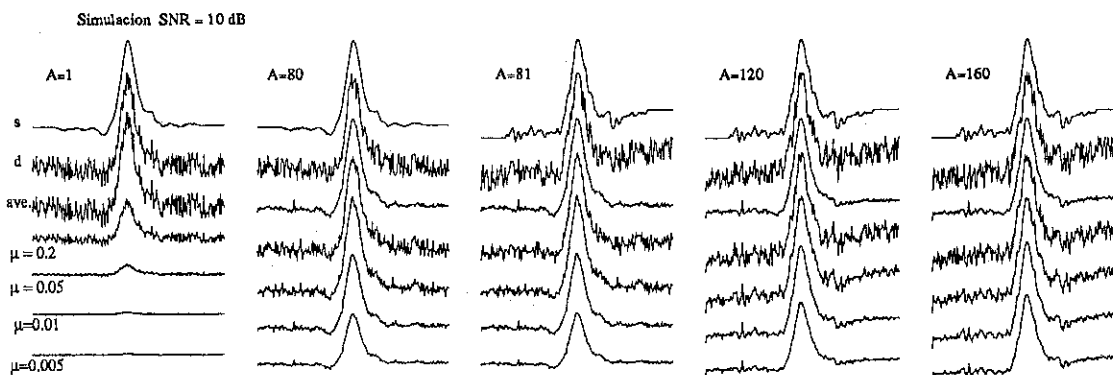


Figura 6.20: Resultados para 160 recurrencias ($d_k(m)$) con un cambio en la componente determinista s_k en la recurrencia 81. $SNR_d = 10$ dB.

6.5.3.2 Aplicación a la detección de potenciales ventriculares tardíos

El filtro adaptativo ha sido finalmente aplicado a la detección de PVT en señales ECG de alta resolución. Se han usado los mismos valores de μ que en la simulación y también se comparan los resultados con el promediado clásico.

Las señales ECG fueron registradas con un amplificador de instrumentación biomédica *Gould* de elevada ganancia y bajo ruido para magnificar y preservar lo más posible los potenciales de baja amplitud. El amplificador consta de una etapa previa de aislamiento y un amplificador de alta ganancia. La señal de salida de este sistema es procesada adecuadamente y almacenada en un PC, utilizando una frecuencia de muestreo de 5 kHz y una resolución de 16 bits. Previamente se filtró con un filtro paso bajo analógico, con una frecuencia de corte de 1 kHz (-3 dB) para evitar problemas de *aliasing*.

La señal ECG registrada pertenece a una de las derivaciones ortogonales sin corregir (X, Y, Z) de un paciente con taquicardia ventricular y por tanto candidato a presentar PVT. Esta derivación bipolar ha sido procesada independientemente por el filtro adaptativo y por el promediado clásico. En ambos casos se ha usado un filtrado adaptado como método de alineamiento y definición del WOT del QRS, y así se ha usado como punto de sincronismo el WOT dado por este método (Jané y otros, 1989b). Las ventanas de QRS seleccionadas se extienden 300 ms y comprenden el QRS y el segmento ST. Dada la frecuencia de muestreo, 5 kHz, y el intervalo de definición, 300 ms, el valor de L es 1500 muestras. Estas ventanas han sido definidas por el detector selectivo de QRS.

La primera fila de gráficas de la figura 6.21 muestra un conjunto de recurrencias de la señal d_k (complejo QRS) de las 100 consideradas en total. En la segunda fila se presentan los resultados del promediado y en las siguientes los del filtrado adaptativo.

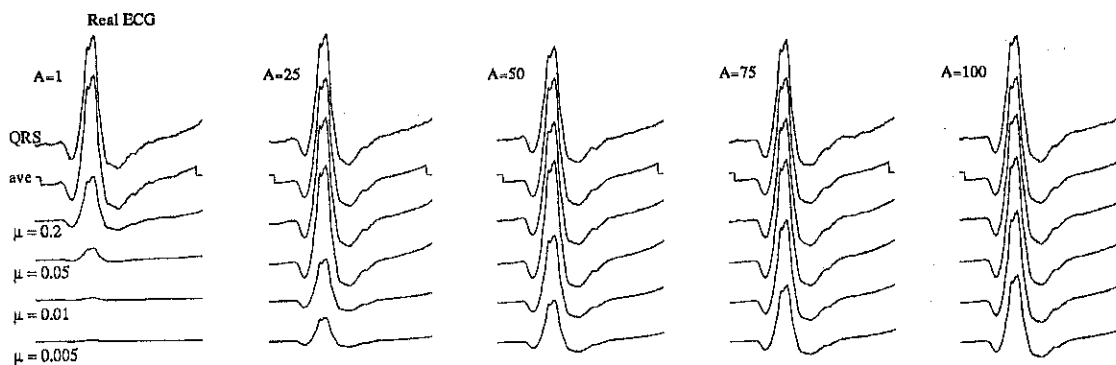


Figura 6.21: Aplicación del filtro adaptativo a señales ECG de alta resolución reales (100 recurrencias).

Las señales obtenidas de las anteriores mediante un filtro paso alto se representan

en la figura 6.22. El filtro aplicado es tipo FIR con una anchura de banda de 50-250 Hz. En estas señales pueden observarse PVT estimados por medio del promediado clásico y del filtrado adaptativo. En este caso la componente determinista permanece prácticamente constante y por ello ambas técnicas presentan similar comportamiento. En casos en que la forma de estos potenciales varíe con el tiempo, el filtrado adaptativo, tal como se ha comprobado mediante simulación, presenta mejor comportamiento que el promediado de señal.

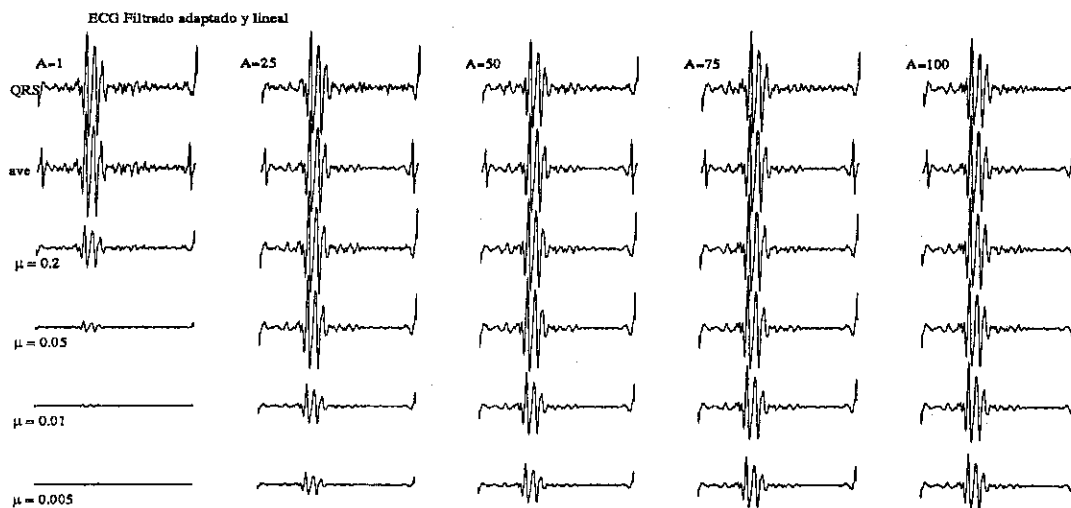


Figura 6.22: Señales mostradas en la figura anterior (6.21) después de filtradas con un filtro FIR paso banda 50-250 Hz.

Por último se ha realizado el proceso inverso: primero se filtra la señal con el filtro FIR y posteriormente se realiza el filtrado adaptativo. Los resultados pueden verse en la figura 6.23. Analizando en detalle este filtro adaptativo se comprueba que es un filtro lineal y, por tanto, es lógico que se obtengan los mismos resultados con los dos procesos. En efecto, la linealidad de este filtro puede deducirse de 6.190, donde se muestra evidente, a través del formalismo de promediado ponderado, la linealidad de este filtro adaptativo. En general, un filtro adaptativo no tiene por que ser lineal, si bien en este caso y con esta configuración concreta, el sistema presenta esta característica.

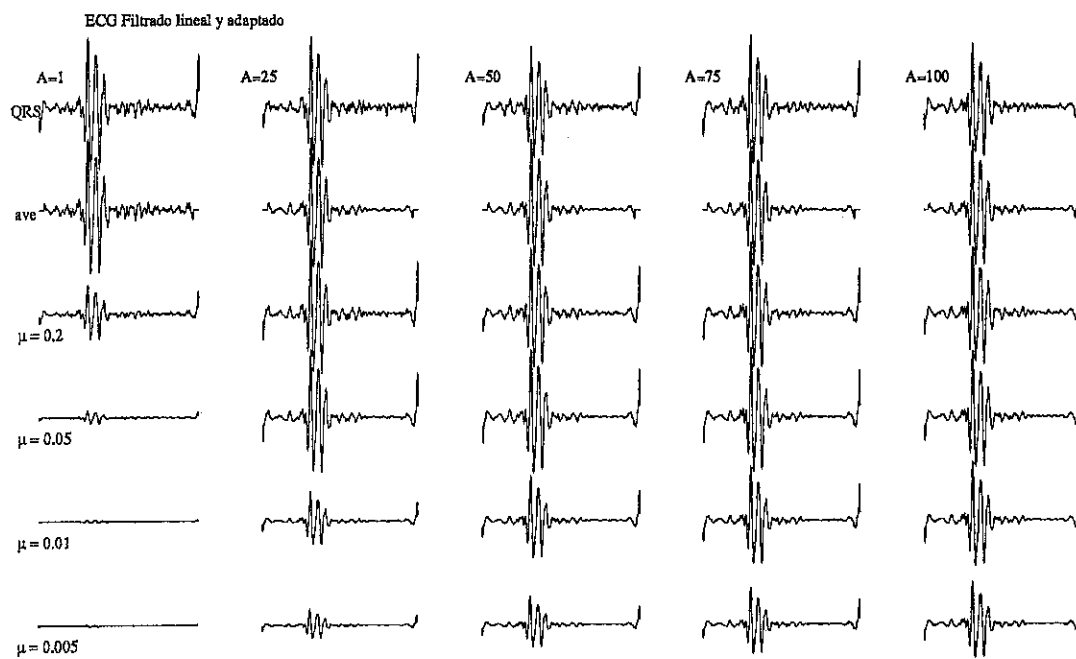


Figura 6.23: Resultados obtenidos al aplicar primero el filtro FIR paso banda 50-250 Hz seguido del filtrado adaptativo. Los resultados son los mismos que en el caso inverso dada la linealidad de ambos filtros.

6.5.4 Otras aplicaciones

Este filtro propuesto puede aplicarse al filtrado y detección de otras ondas dentro del ECG, e incluso otras señales biomédicas que estén ligadas a un impulso.

Este filtro podría aplicarse también sobre la onda T, usando como punto de sincronismo su WOT asociado (capítulo 5). De este modo se eliminarían las interferencias no correladas con dicha onda (línea de base, 50 Hz, ruido muscular, ...), preservandola, incluso en el caso de que frecuentemente esté solapada con el ruido.

La aplicación del algoritmo de medida del intervalo QT, desarrollado en el capítulo 3, sobre las ondas T filtradas con este filtro adaptativo mejorará los resultados con señales muy ruidosas. El mismo filtro puede aplicarse al complejo QRS para posteriormente medir el inicio de la onda Q. Recuérdese que dicha onda Q presenta componentes frecuenciales elevadas que son atenuadas con los filtros paso bajo usados (capítulo 3), y pueden ocasionar errores en la detección de su inicio. Análogamente podría extenderse el filtrado a la onda P para definir sus puntos característicos.

De hecho, un esquema análogo (Yi-Sheng y Thakor, 1987) puede usarse para detectar ondas P que no siguen la secuencia normal de los latidos dentro del ECG. Estas ondas no están correladas con el QRS y, por tanto, un filtro de este tipo aplicado con referencia al QRS atenúa dichas ondas. Si se toma como salida no la señal y_k sino el propio error e_k , se tiene que en esta señal estará la onda P no correlada con el QRS. Nótese que, en situación de mínimo error cuadrático medio, $y_k = s_k$, por lo que $e_k = d_k - s_k$ es una estimación de la parte de señal no correlada con s_k .

Otra aplicación en la cual puede usarse un esquema de este tipo es en la estimación de potenciales evocados. Estos potenciales, que son la respuesta eléctrica del sistema nervioso central a un estímulo externo aplicado de forma controlada, presentan una relación señal-ruido muy baja (0 a -10 dB). Este estímulo controlado permite definir con total precisión la entrada de referencia del filtro adaptativo. Vaz y Thakor (1989) usan como entradas de referencia funciones senos y cosenos, de modo que caracterizan la forma del potencial evocado mediante los parámetros (pesos) del esquema adaptativo.

6.6 Conclusiones

La estimación y seguimiento de señales repetitivas tiene una gran importancia como medio de obtener información sobre el suceso físico que llevan asociado. En particular, la señal ECG contiene información sobre el funcionamiento del sistema cardiaco, que en ocasiones se encuentra encubierta por el ruido presente en esta señal. Las técnicas clásicas de procesado (filtros lineales) distorsionan mucho la señal si esta tiene componentes frecuenciales solapadas con el ruido.

El método adaptativo propuesto en este capítulo presenta las ventajas de su posible realización en línea, así como el realizar un seguimiento dinámico de la señal de interés. Ello permite preservar sólo la componente correlada con el evento externo y con la referencia X_k , y atenuar el ruido si éste no esté correlado con la señal. Se ha particularizado el formalismo de filtros adaptativos para el caso en que las entradas de referencia sean ortogonales, y en particular ortonormales, que pueden una base. Las expresiones matemáticas que describen el comportamiento del sistema presentan una menor complejidad analítica que en el caso general, y se han desarrollado para el algoritmo LMS.

Las variaciones temporales del proceso recurrente (no estacionariedad) pueden ser estudiadas a través de las variaciones de todos o alguno de los parámetros (pesos) que caracterizan la señal y que son readaptados en cada recurrencia. Este hecho se debe a la posibilidad de obtener tiempos de convergencia del orden de una recurrencia de la señal y así evidenciar cambios en las recurrencias aunque éstos aparezcan esporádicamente.

Este método adaptativo de procesado se presenta como una alternativa dentro del campo del procesado de señales, donde el tratamiento matemático es de mayor complejidad que en el caso de filtros lineales clásicos, pero que la práctica ha mostrado muy útil en muchas aplicaciones e impulsa cada vez más el desarrollo de estas técnicas.

Se han propuesto y desarrollado dos aplicaciones concretas de este método para procesado de señales ECG. A continuación se analizan cada una de estas aplicaciones.

De la aplicación concreta para modelar el complejo QRS se puede extraer las siguientes conclusiones: El modelo de Hermite puede usarse para representar a los complejos QRS con un número pequeño de parámetros, de modo que la información

queda muy concentrada. Estos parámetros pueden ser usados como características para establecer una clasificación de los QRS según su forma cuando se obtiene un tiempo de convergencia de en torno a una recurrencia. La extracción de estas características puede hacerse en tiempo real siempre y cuando se cuente con un generador en tiempo real de las funciones de Hermite con parámetro b variable. El modelo incorpora al parámetro de anchura b , que se adapta de forma dinámica con las recurrencias de QRS. Este hecho permite detectar y separar QRS ectópicos de los normales mediante simple inspección de este parámetro, así como tener un seguimiento dinámico de la anchura del QRS. Se ha propuesto un algoritmo de adaptación para el parámetro b , deduciéndose que las condiciones de convergencia dependen del factor de ganancia en la adaptación μ_2 , y de las propias características de la señal a través de la energía de ésta (SE). Se ha desarrollado un formalismo que aproxima el comportamiento de la adaptación del parámetro b , de modo que se puede tener una estimación del tiempo necesario para que éste converja.

El punto de sincronismo de la adaptación se ha definido respecto a la marca dada por el detector del QRS. Un posterior estudio para determinar los efectos de la localización de este punto sería conveniente.

Por último, se ha comprobado que la configuración adaptativa con entradas impulso como referencia (comportamiento como filtro) resulta adecuada para la estimación de la componente determinista de la señal, eliminando el ruido no correlado con ésta o con el impulso asociado a ella. El comportamiento de este filtro se ha evaluado considerando como criterio la mejora de la SNR en la señal de salida cuando las entradas de referencia forman una base. Se ha analizado el equivalente a este filtro con una sola entrada de referencia, lo cual le hace más eficiente desde el punto de vista del desarrollo real. También se ha mostrado su comportamiento como un promediado ponderado realizado más eficientemente, y se ha comprobado cómo los dos formalismos conducen a los mismos resultados. Finalmente se ha aplicado sobre señales ECG de alta resolución para la obtención de potenciales ventriculares tardíos.

Igualmente, se ha comprobado que el comportamiento del filtro mejora el del promediado clásico cuando hay variaciones dinámicas en la señal determinista. Respecto a otros esquemas adaptativos propuestos para detectar estos potenciales ventriculares tardíos (Al-Nashash y otros, 1989), el filtro propuesto permite eliminar

las componentes de 50/60 Hz, lo que no puede realizarse con los ya mencionados. La razón está en el hecho que Al-Nashash y otros (1989) eliminan el ruido si su función de autocorrelación decae rápidamente en el tiempo, usando como entrada de referencia la misma señal en estudio retardada una cierta cantidad. Esta característica no se da en las interferencias de 50/60 Hz, pero su fase no está correlada con el WOT de cada recurrencia, lo que permite al filtro propuesto en este capítulo eliminar estas interferencias.

Al seleccionar el valor de μ de este filtro, se requiere un compromiso entre la velocidad de convergencia y la mejora de la SNR. Por ello, la elección se realizará en cada caso, dependiendo también de la señal sobre la cual se va a aplicar. En general, este filtro puede usarse para separar en una señal la componente asociada a un cierto evento de la no asociada (tomar como salida y_k o e_k), independientemente de cual de las dos sea la de interés. Las aplicaciones posibles son múltiples, como ya se ha apuntado anteriormente (ECG de alta resolución, detección de ondas no sincronizadas con cada latido, potenciales evocados, ...), y pueden extenderse a otros campos del procesado de señal, biológicos o no, como puede ser la identificación de sistemas variables en el tiempo a través de las señales asociadas a estos, o cualquier otro fenómeno repetitivo, dinámico y que este representado por una señal accesible físicamente.

Capítulo 7

CONCLUSIONES

La señal ECG es portadora de una gran cantidad de información sobre el funcionamiento del sistema cardiaco, que le hace especialmente útil en el diagnóstico y seguimiento de cardiopatías. Técnicas automáticas de procesado y análisis de dicha señal son, por tanto, de una gran utilidad clínica, principalmente en registros Holter de larga duración en donde un proceso manual de medida resulta prácticamente inviable.

Muchos son los trabajos y aportaciones realizadas hasta este momento en el campo del procesado de la señal ECG. Estos abordan problemas generales de procesado, como adecuación y mejora de la SNR de la señal, detección de QRS, etc. Otros corresponden a problemas específicos generados por la necesidad de medida de determinados parámetros o características del ECG. Las soluciones dadas, en muchos casos, presentan limitaciones cuando la señal está enmascarada por una alta contaminación de ruido, especialmente cuando éste tiene un espectro solapado con el propio de la señal.

El trabajo desarrollado en esta tesis se ha orientado al procesado de la señal ECG para obtener una correcta identificación de los puntos significativos de ésta. Su determinación permite realizar medidas y seguimientos de los parámetros de interés clínico.

Se han realizado aportaciones en: el preprocesado y adecuación de la señal (diseño de filtros); en las técnicas de definición de puntos significativos, bien sean límites temporales de las distintas ondas o instantes de ocurrencia de éstas; así como en el procesado adaptativo del ECG, haciendo uso de la propiedad de recurrencia de éste,

lo que ha permitido realizar caracterizaciones y seguimientos dinámicos del ECG. El objetivo de este trabajo ha sido siempre intentar dar respuesta a los problemas técnicos para las medidas consideradas, dentro del campo del procesado de señales y en particular del ECG. En ningún momento se ha pretendido abordar aspectos de aplicación clínica por considerarlos fuera del alcance de esta tesis, si bien en algunos casos se han realizado estudios con un reducido número de pacientes que pueden ser indicativos de determinadas tendencias.

A continuación se enumeran más detalladamente las aportaciones de la tesis y las posibles extensiones futuras de este trabajo.

7.1 Aportaciones de la tesis

Las aportaciones originales de esta tesis se encuentran en el campo del procesado de la señal ECG. Estas aportaciones se han materializado en la propuesta de determinadas técnicas de procesado y en *software* que las implementa y permite aplicarlas sobre registros reales de ECG. Los aspectos originales más importantes de estas aportaciones se detallan a continuación.

En primer lugar, se ha abordado el estudio del preprocesado de la señal ECG mediante la aplicación de filtros derivativos paso bajo ó LPD. Dadas las características de la señal ECG, se ha propuesto una técnica de diseño de estos filtros basada en el conocimiento apropiado y *a priori* del espectro de la señal y del ruido. Esta estimación es posible en el ECG y en general en señales biológicas, que son la respuesta de una actividad fisiológica conocida y común a todos los posibles registros de señal. De este modo puede estimarse el espectro de la señal, en el supuesto que no sufre variaciones importantes a lo largo del tiempo. En la medida que estas variaciones se hagan más importantes, el método propuesto irá perdiendo validez.

Se han diseñado LPD que optimizan distintos criterios en el procesado de la señal ECG, según su aplicación concreta. Los filtros así obtenidos se han aplicado a registros especialmente ruidosos. Se ha considerado la generalización de la técnica de diseño a otras señales y otros tipos de filtros, como son los paso alto y paso bajo.

En segundo lugar, se han propuesto y desarrollado un detector de QRS orientado

específicamente para registros de Holter y medida del intervalo QT. Este detector utiliza umbrales adaptativos que se ajustan según el valor de la señal. Además el proceso de detección está orientado a facilitar la posterior medida del intervalo QT. Se ha primado la velocidad de cálculo frente a la robustez, dado que ésta se obtiene con el posterior proceso de medida del QT.

Se ha propuesto otro detector de QRS que incorpora una etapa opcional de selección de latidos. Este detector de propósito general y robusto incorpora una etapa de procesado no lineal con aportaciones novedosas en cuanto al filtro utilizado en esta etapa. Esta aportación consiste en un filtrado adaptado cuya respuesta impulsional es calculada con una estimación previa de la forma del QRS. La etapa de decisión incorpora, respecto a otros detectores, información sobre la derivada, evitando así detecciones de ondas T como falsos QRS. Por último, la etapa de selección de latidos se realiza en función de parámetros sobre su forma, como son amplitud y anchura, lo que hace factible discriminar latidos de morfologías muy desiguales o con elevada contaminación de ruido. Esta característica es muy útil en posteriores procesados que hacen uso de cierta constancia en la forma de los latidos (detección de PVT).

En tercer lugar, se ha propuesto un método para la medida de los inicios y finales de las ondas presentes en el ECG. Este procedimiento es inmune a variaciones de la línea de base, pues actúa con criterios sobre la derivada, que tiene una pobre ganancia para el rango de frecuencias de la línea de base. Este método ha permitido medir el intervalo QT y QTP con una precisión comparable a la obtenida manualmente sobre registros de papel.

El algoritmo está protegido de posibles errores, incorporando para ello una etapa de selección de latidos o medidas de QT que no afecta al seguimiento dinámico de dicha medida.

Este algoritmo ha sido aplicado sobre tres grupos de pacientes, con el objetivo de estudiar la posible significación del intervalo QT como marcador de pacientes postinfarto de miocardio propensos a desarrollar arritmias ventriculares malignas. El valor del QT se ha comparado con el del QTP y de la variabilidad del ritmo cardiaco (HRV), evidenciándose la información que suministra cada parámetro. Este estudio es preliminar, se realiza sobre un reducido número de pacientes, y por tanto los resultados deben ser vistos únicamente como una posible tendencia de la que no se pueden extraer

conclusiones clínicas definitivas.

En cuarto lugar, se ha abordado la problemática de la definición de los instantes de ocurrencia o aparición de las distintas ondas del ECG. Se ha considerado un método recientemente propuesto, basado en un estimador del tiempo de retardo entre señales recurrentes de la misma forma, y se ha estudiado su comportamiento en función del ruido en diferentes casos. Se han deducido expresiones analíticas que permiten calcular *a priori* el error de la estimación como función de la propia señal y de la SNR. Se ha comprobado que el uso de la señal al cuadrado en la estimación produce un sesgo en la medida, pero por contra tiene una menor desviación tipo. Se ha propuesto un estimador corregido que elimina el sesgo con una desviación tipo menor de la que se obtiene con el uso de la señal sin modificar.

Se ha elaborado una técnica de estimación de la relación señal-ruido (SNR) presente en las señales, haciendo uso del estimador sesgado antes mencionado.

También se ha propuesto un método de medida de intervalos temporales entre ondas de un mismo latido y entre ondas de latidos consecutivos. Este procedimiento está basado en el estimador antes mencionado y permite hacer un análisis de variabilidad de intervalos con una gran precisión que puede ser controlada, y facilitar así el análisis de su significación clínica.

En quinto lugar, se ha desarrollado un esquema adaptativo de procesamiento de señales que presentan un comportamiento transitorio y recurrente (en particular el ECG). Este esquema atenúa la parte de la señal y el ruido no correlados con el impulso asociado a la recurrencia de ésta. Así pueden eliminarse las componentes frecuenciales del ruido coincidentes con las de la señal. Se ha desarrollado casualmente el formalismo matemático que representa al comportamiento del sistema adaptativo cuando las entradas de referencia son funciones ortonormales.

El esquema se ha particularizado para modelar al complejo QRS mediante las funciones de Hermite con un parámetro de anchura variable y se ha elaborado un modelo matemático que describe el comportamiento de este esquema. Se ha comprobado que este formalismo permite estimar adecuadamente las características del proceso de adaptación. Se ha aplicado este esquema de procesamiento sobre la señal ECG para la clasificación de QRS y detección de latidos ectópicos, siendo posible realizar ambas

funciones con un reducido número de parámetros.

Otra aplicación del esquema propuesto ha sido el filtrado de la señal asociada a cada recurrencia para así estimar la componente determinista. Este filtro se ha analizado desde el punto de vista del procesado adaptativo y se ha establecido su equivalencia con un determinado promediado ponderado, comprobándose cómo ambos formalismos conducen a los mismos resultados. Se han deducido las expresiones de la mejora de la SNR en función del parámetro de adaptación μ . El filtro se ha aplicado a la detección de potenciales tardíos, comparándose su comportamiento con el del promediado clásico de señal. Se ha puesto de manifiesto cómo este filtro permite realizar seguimientos de señales variables en el tiempo, lo que no es posible mediante el promediado clásico.

Las técnicas y desarrollos teóricos propuestos siempre se han aplicado sobre señales ECG reales. En función de los casos se ha añadido ruido simulado para hacer más patente los efectos del procesado, o se han considerado situaciones ideales (como sincronismos perfectos en las recurrencias, exacto conocimiento de la señal determinista, etc) para evidenciar determinados efectos.

Cabe indicar que todas las técnicas propuestas para procesado del ECG han sido implementadas en *software*, de modo que se encuentra disponible para ser aplicado sobre registros de ECG cualesquiera. Su implementación en equipos comerciales requeriría, en algunos casos, ciertas consideraciones de robustez, ya que la pretensión de este trabajo ha sido de diseño y validación de las técnicas ya comentadas.

7.2 Extensiones futuras

El trabajo aquí presentado en modo alguno ha pretendido ser un tema cerrado y de hecho no lo es. Los problemas asociados con el procesado y medida de señales biológicas y en particular del ECG, así como el objetivo todavía lejano de obtener diagnósticos fiables automáticamente a partir de la propia señal, hacen que difícilmente pueda considerarse un determinado campo o tema de trabajo como cerrado. A continuación se indican algunas de las posibles extensiones de este trabajo.

El diagnóstico de muchas cardiopatías no se realiza en función de un sólo parámetro, sino de un conjunto de ellos que generalmente son amplitudes de las ondas del ECG

y el valor de varios intervalos. La generalización del método de medida del intervalo QT a todos los puntos significativos en la determinación de intervalos de interés clínico y la consideración de medidas de amplitud, podría dar los datos suficientes para establecer un diagnóstico. Este podría también abordarse desde el punto de vista de los sistemas expertos. Así, usando como datos los valores de los intervalos u otros parámetros medidos sobre la señal podría desarrollarse un sistema que sirviera de ayuda al diagnóstico.

Respecto al algoritmo de medida de QT ya propuesto, se habrían de considerar los casos en los que aparecen latidos ectópicos y arritmias VT ó VF, en los cuales no tiene sentido medir este intervalo. Si estas irregularidades aparecen aisladamente, la selección de latidos las rechazará, en caso contrario pueden ser una fuente de error en la medida. La misma consideración habría de hacerse en otras medidas que se consideren dentro de la señal ECG.

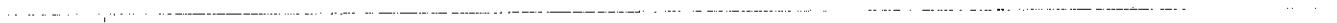
Otra extensión que excede el dominio de este trabajo, pero que sería muy interesante, es un estudio clínico exhaustivo que permita acotar y valorar en su justa medida la validez del intervalo QT como indicador de arritmias malignas y eventualmente de muerte súbita.

Al respecto de la estimación de los instantes de ocurrencia de las ondas en el ECG, o de señales en general, se ha estudiado en profundidad el comportamiento en presencia de ruido de un método de estimación del tiempo de retardo basado en el cálculo de las integrales normalizadas de la señal. Un estudio que incluyera un análisis similar para otros métodos de estimación, como pudiera ser el filtrado adaptado, permitiría dar una base formal y una justificación a los estudios ya realizados en simulación (Jané y otros, 1990a), y que permiten clasificar distintos métodos según el error de la estimación que realizan.

Podrían también, respecto al estimador usado en este trabajo, considerarse otras aproximaciones de orden superior en los cálculos realizados, de modo que pudiera predecirse con mayor precisión el comportamiento de la estimación. Asimismo podría considerarse cómo afectan ligeras variaciones de forma en la estimación dada por el sistema. Estas modificaciones se producen en el ECG como efecto de la respiración y la actividad muscular.

En la parte del procesado adaptativo se pueden plantear aplicaciones de gran interés desde el punto de vista del procesado de señal. El hecho de que el ECG sea recurrente, y las variaciones respecto de esta recurrencia sean índices de anormalidades cardíacas, hacen que el esquema adaptativo propuesto pueda ser usado para evidenciar estas modificaciones. La aplicación de este esquema para detectar ondas Q, QRS y T fuera de secuencia, y el estudio del comportamiento del filtro en este caso resultaría muy interesante.

Por último, la aplicación del esquema adaptativo a otras señales recurrentes, (biológicas o no) como los potenciales evocados pueden abrir un interesante campo de trabajo y de aplicación de la técnica de procesado descrita en el capítulo 6 de esta tesis, así como de la técnica de diseño de filtros propuesta en el capítulo 2.



REFERENCIAS

- Ahlstrom M.L. y Tompkins W.J. (1985), "Digital Filters for Real-Time ECG Signal Processing Using Microprocessors", *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. BME-32, n. 9, pp. 708-713.
- Ahmed N. y Rao K.R. (1975), "Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing", *Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York*.
- Al-nashash H.A.M., Kelly S.W. y Taylor D.J.E. (1988), "Beat-to-beat detection of His-Purkinje system signals using adaptive filters", *Med. & Biol. Eng. & Comput.* vol. 26, pp. 117-125.
- Al-nashash H.A.M., Kelly S.W. y Taylor D.J.E. (1989), "Noinvasive beat-to-beat detection of ventricular late potentials", *Med. & Biol. Eng. & Comput.* vol. 27, pp. 64-68.
- Ahnve S., Lundman T. y Shoaleh-Var, M. (1978), "The relationship between QT interval and primary ventricular fibrillation in acute myocardial infarction.", *Acta Med. Scand* 204, pp. 17-19.
- Ahnve S., Gilpin E., Madsen E.B., Froelicher V., Henning H. y Ross J. (1984), "Prognostic importance of QT_c interval at discharge after acute myocardial infarction: a multicenter study of 865 patients.", *American Heart Journal*, pp. 108-395.
- Ahnve S. (1985), "Errors in visual determination of corrected QT (QT_c) interval during acute myocardial infarction", *J. Am Coll Cardiol.* 5, pp. 699-702.
- Algra A., Le Brun H. y Zeelenberg C. (1987), "An algorithm for computer measurement of QT intervals in the 24 hour ECG". *In Computers in Cardiology. IEEE Computer Society Press.*, pp. 117-119.
- Andrews B. y Jones D. (1976), "A note on the differentiation of human kinematic data", *en Dig. 11th Int. Conf. Med. Biol. Eng.*, Ottawa, Ont., Canada, pp. 88-89.

- Bazett H.C. (1920), "An analysis of the time relation of electrocardiograms", *Heart*, 7, pp. 353-370.
- Belforte G., De Mori R. y Ferraris F. (1979), "A contribution to the automatic processing of electrocardiograms using syntactic methods", *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. BME-26, n. 3.
- Bendat J.S. y Piersol A.G. (1986), "Random Data. Analysis and Measurements Procedures", *John Wiley & Sons*, New York.
- Berbari E.J. y Lazzara R. (1988), "An introduction to high-resolution ECG recordings of cardiac late potentials", *Arch. Intern. Med.*, vol. 148, pp. 1859-1863.
- Birman K.P. (1982), "Rule-based learning for more accurate ECG analysis", *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. PAMI-4, n. 4, pp. 369-380.
- Birman K.P. (1983), "Using SEEK for multichannel pattern recognition", *Comput. Biom. Res.*, vol. 16, pp. 311-333.
- Börjesson P.O., Pahlm O., Sörnmo L. y Nygard M.E. (1982), "Adaptive QRS detection based on maximum-a-posteriori estimation", *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. BME-29, pp. 341-351.
- Bose N.K. (1985), "Digital Filters", *North-Holland*, Amsterdam.
- Bradford A. (1977), "Texto básico de estadística médica" *El ateneo*, Buenos Aires.
- Brooks W.W., Verrier R.L. y Lown B. (1978), "Influence of vagal tone on stelectomy induced changes in ventricular electrical stability", *AM. J. Physiol.* 234 pp. 503.
- Browne K.F., Zipes D.P., Heger J.J. y Prystowsky E.N. (1982), "Influence of the autonomic nervous system on the QT interval in man", *AM. J. Cardiol.*, 50 pp. 1099.
- Burdon-Sanderson J. y Page F.J.M. (1878), "Esperimental results relating to the rhythmical and excitatory motions of the ventricles of the heart and the electrical phenomena which accompany them". *Proc. R. Soc. London.* 27 pp. 410.

- Butrous G.S. (1986), "The QT interval: its clinical implication". *Current opinion in cardiology*, pp. 1-29.
- Carter G.C. (1981), "Time delay estimation (Guest editorial), Special Issue on Time Delay Estimation", *IEEE Trans. Acoustic, Speech, and Signal Processing*, vol. ASSP-29, n. 3.
- Chou T.C. (1986), "Electrocardiography in clinical practice", segunda edición, *Orlando: Grune & Stratton*.
- Coulon F. (1986), "Signal Theory and Processing", *Artech House*, Dedham.
- Coumel P.H., Rosengarten M.D., Leclercq J.F. y Attuel P. (1982), "Role of sympathetic nervous system in non-ischemic ventricular arrhythmias", *Br. Heart J.*, 47, pp. 137.
- Critelli G., Marciano F., Mazzarella M. y Migaux M.L. (1982), "QT interval measurements of long-term ECG recordings. Application to an automatic Holter analysis system", *In Computers in Cardiology. IEEE Computer Society Press*, pp. 481-480.
- Cromwell L., Weibel F.J. y Pfeiffer E.A. (1980), "Biomedical Instrumentation and Measurements", *Prentice Hall*, New Jersey.
- Dillman R., Judell N. y Kuo S. (1978), "Replacement of AZTEC by correlation for more accurate VPB detection", *Computers in Cardiology, IEEE Computer Society Press*, pp. 29-32.
- Einthoven W., Fahr G. y deWaart A. (1913), "Über die richtung und die manifeste grosse der poentialschwankungen in menschlischen herren und uber den einfluss der herzlage auf die form des elektrocardiogaams", *Pfluegers Arch. Gesamte Physiol. Menschen Tiere*, vol. 150, pp. 275-315.
- Einthoven W. (1903), "Ein neues galvanometer". *Ann. Phys. (Leipzig)*, 12, pp. 1059-1071.
- Ewing D.J., Neilson J.M.M. y Travis P. (1984), "New method for assessing cardiac parasympathetic activity using 24 hour electrocardiograms", *Br. Heart J.*, vol. 52. pp. 396-402.

- Feuer, A. y Weinstein E. (1985). "Convergence analysis of LMS filters with uncorrelated gaussian data", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processig*, vol. ASSP-33. No. 1. pp. 222-229.
- Gasser T., Köhler W., Jennen-Steinmetz C. y Sroka L. (1986), "The analysis of noisy signals by nonparametric smoothing and differentiation" *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. BME-33, pp. 1129-1133.
- Gritzali F. (1988), "Towards a generalized scheme for QRS detection in ECG waveforms", *Signal Processing*, vol. 15, pp. 183-192.
- Hamming R.W. (1977), "Digital Filters", *Prentice-Hall*, New York.
- Holter N.J. (1961), "New method for heart studies: Continuous electrocardiography of active subjects over long period is now practical", *Science* **134**, pp. 1214.
- Jané R. (1989a), "Noves tècniques en l'anàlisi del senyal electrocardiogràfic: Aplicació a l'ECG d'alta resolució". *Tesis Doctoral*
- Jané R., Caminal P., Rix H., Thierry E., y Laguna P. (1989b), "Improved alignment methods in ECG signal averaging: application to late potentials detection", *Proc. Computers in Cardiology, IEEE Computer Society Press*, Washington, pp. 481-484.
- Jané R., Rix H., Caminal P., y Laguna P. (1990a), "Alignment methods for signal averaging of high resolution cardiac signals: a comparative study of performance", *IEEE Trans. Biomedical Eng.*, (pendiente publicación).
- Jané R., Laguna P., Caminal P., y Rix H. (1990b), "Adaptive filtering of high-resolution ECG signals", *en Computers in Cardiology, IEEE Computer Society Press*, Chicago.
- Jané R., Laguna P. y Caminal P. (1990c), "Adaptive filtering of event-related bioelectric signals", *Proc. of the 12th Int. Conf. of the IEEE Eng. in Med. and Biol. Soc.*, Philadelphia (in press).
- Jesus S. y Rix H. (1988), "High resolution ECG analysis by an improved signal averaging method and comparison with a beat-to-beat approach", *J. Biomed. Eng.* vol. 10 pp. 25-32.

- Kannel W.B., Doyle J.T., McNamara P.M., Quickenton P. y Gordon T. (1975), "Precursors of sudden coronary death: Factors related to the incidence of sudden death", *Circulation* **51**, pp. 606.
- Kitney R.I. y Rompelman O. (1980), "The study of heart rate variability" *Clarendon Press*, Oxford.
- Kleiger R.E., Miller J.P., Bigger J.T. y Moss A.J. (1984), "Heart rate variability: A variable predicting mortality following acute myocardial infarction", *J. Coll. Cardiol.*, vol. 3 pp. 2.
- Kleiger R.E., Miller J.P., Bigger J.T. y Moss A.J. (1987), "Decreased heart rate variability and its association with increased mortality after myocardial infarction", *AM. J. Cardiol.*, **59** pp. 256-262.
- Khon F. (1987), "Phase distortion in biological signal analysis caused by linear phase FIR filters", *Med. & Biol. Eng. & Comp.*, vol. 25, pp. 231-238.
- Koeleman A.S.M., Ros H.H. y van Steenwijk R. (1983), "The slow dynamics of the AV conduction", *Circulation*, vol. 68, pp. 153.
- Koeleman A.S.M., van den Akker T.J., Ros H.H., Janssen R.J., y Rompelman O. (1984), "Estimation accuracy of P-wave and QRS complex occurrence times in the ECG: The accuracy for simplified theoretical and computer simulated waveforms", *Signal Processing*, vol. 7, n. 4, pp. 389-405.
- Koeleman A.S.M., Ros H.H., y van den Akker T.J. (1985), "Beat-to-beat interval measurement in the electrocardiogram", *Med. & Biol. Eng. & Comput.* vol. 23, pp. 213-219.
- Laguna P., Caminal P., Thakor N., Jané R., Martí V., y Bayes A. (1989a), "Automatic analysis of QT prolongation in postmyocardial infarction patients". *Proc. V Mediterranean Conf. on Medical and Biological Engineering*. pp. 230-231.
- Laguna, P., Caminal P., Thakor N.V., y Jané R. (1989b), "Adaptive QRS shape estimation using Hermite model", *11 th IEEE annual conference of Eng. in Med. and Biol. Soc.*, pp. 683-684.

- Laguna P., Thakor N., Caminal P., Jané R. y Hyung-Ro Y. (1990a), "New algorithm for QT interval analysis in 24 hour Holter ECG: Performance and applications". *Med. & Biol. Eng. & Comput.* vol. 28, pp. 67-73.
- Laguna P., Thakor N., Caminal P. y Jané R. (1990b), "Low-pass differentiators for biological signals with known spectra: Application to ECG signal processing" *IEEE Trans. Biomedical Eng.* vol. 37, n. 4, pp. 420-424.
- Laguna P., Caminal P., Jané R., y Rix H. (1990c), "Evaluation of HRV by PP and RR interval analysis using a new time delay estimate", *en Computers in Cardiology, IEEE Computer Society Press, Chicago.*
- Laguna P., Rix H., Caminal P., y Jané R. (1990d), "Performance analysis of a time delay estimate between two noisy transient signals", *Proc. of the 12th Int. Conf. of the IEEE Eng. in Med. and Biol. Soc.*, Philadelphia (in press).
- Lesh M.D., Mansour J.M. y Simon S.R. (1979), "A gait analysis subsystem for smoothing and differentiation of human motion data", *J. Biomech. Eng.*, vol. 101, pp. 205-212.
- Ligtenberg A. y Kunt M. (1983), "A robust-digital QRS detection algorithm for arrhythmia monitoring", *Comp. Biomed. Res.*, vol. 16, pp. 273-286.
- Lynn P.A. (1977), "Online digital filters for biological signals: some fast designs for a small computer", *Med. & Biol. Eng. & Comput.*, 15, pp. 534-540.
- Lynn P.A. (1982), "An introduction to the analysis and processing of signals", second edition *Macmillan Education Ltd, London.*
- Magid N.M., Martin G.J., Kehoe R.F., Zheutlin T.A., Eckberg D.L., Myers G.A., Barnett P.S., Murray E.A., Gonzales S.K., Weiss J.S., Lesch M. y Singer D.H. (1985), "Diminished heart rate variability in sudden cardiac death" *Circulation*, vol. 72 n. 4.
- Marble A.E., McIntyre C.M., Hastings-James R. y Hor W. (1981), "A comparison of digital algorithms used in computing the derivative of left ventricular pressure", *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. BME-28, pp. 524-529.

- Marinchak, R.A., Kline, R.A. y Engel, T.R. (1985), "Relationship of delayed depolarization to the QT interval after acute myocardial infarction" *American Heart Journal*, pp. 110-742.
- Martí V., Bayes de Luna A., Arriola J., Songa V., Guindo J., Dominquez de las Rozas J., Marrugat J., Sanz F., Thakor N., Min Y., Caminal P. y Laguna P. (1988), "Value of dynamic QTc in arrhythmology", in *Proceedings 8th. Inter. Congr. "The New Frontiers of Arrhythmias"*, Marilleva, Italy, pp. 683-691.
- Masgrau E. y Fernandez J. (1986). "Sistemas digitales adaptativos", *Mundo electrónico* vol. 168, pp. 55-62.
- Murthy I.S.N. y Rangaraj M.R. (1979), "New concepts for PVC detection", *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. BME-26, pp. 409-416.
- Myers G.A., Martin G.J., Magid N.M., Barnett P.S., Schaad J.W., Weiss J.S., Lesch M. y Singer D.H. (1986), "Power spectral analysis of heart rate variability in sudden cardiac death: Comparison to other methods" *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. BME-33, n. 12, pp. 1149-1156.
- Norris R.M. (1982), "Myocardial Infarction: Its presentation, Pathogenesis, and Treatment", *Churchill Livingstone*, New York.
- Nygårds M.-E. y Sörnmo L. (1983), "Delineation of the QRS complex using the envelope of the e.c.g.", *Med. & Biol. Eng. & Comput.* 21, pp. 538-547.
- Opmeer C.H.J.M. (1973), "The information content of successive RR interval times in the ECG. Preliminary results using factor analysis and frequency analysis", *Ergonomics* vol. 16, n. 1, pp. 105-112.
- Oppenheim A.V. y Schaffer R.W. (1975), "Digital Signal Processing", *Prentice-Hall, Inc.* New Jersey.
- Pahm O. y Sörnmo L. (1984), "Software QRS detection in ambulatory monitoring - a review", *Med. & Biol. Eng. & Comp.*, vol. 22, pp. 289-297.
- Pan J. y Tompkins W.J. (1985), "A real-time QRS detection algorithm", *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. BME-32, n. 3, pp. 230-236.

- Papakonstantinou G., Skordalakis E. y Gritzali F. (1986), "An attribute grammar for QRS detection", *Pattern Recognition*, vol. 19, n. 4, pp. 297-303.
- Pisani E., Pellegrini E., Ansuini G., Di Noto G., Rimatori C., y Russo P. (1985), "Performance evaluation of algorithms for QT interval measurements in ambulatory ECG Recording". In *Computers in Cardiology. IEEE Computer Society Press.*, pp. 459-462.
- Principe J.C. y Smith J.R. (1986), "Design and implementation of linear phase FIR filters for biological signal processing", *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. BME-33, n. 6, pp. 550-559.
- Puddu P.E., Jouve R., Torresani J. y Jouve A. (1981) "QT interval and primary ventricular fibrillation in acute myocardial infarction". *Am. Heart J.* 101, 118-119.
- Puddu P.E. y Bourassa M.G. (1986), "Prediction of sudden death from QTc interval prolongation in patients with chronic ischemic disease", *J. Electrocardiology* 19 (3), pp. 203-212.
- Rabiner L.R. y Schafer R.W. (1978), "Digital processing of speech signals", *Prentice-Hall*.
- Rix H. i Jesus S. (1984), "Estimation du retard entre signaux de même forme"., *C.R. Académie des Sciences*, t. 229 série II, n. 8, pp. 399-404.
- Roberts P.M., Fodor J.G., Tibblin G. y Wilhelmsen L. (1986) "A study of the association between the prolongation of the QT interval in the resting ECG and myocardial infarction" *Acta Med. Scand.* pp. 200-395.
- Rompelman O., Snijders J. B.I.M. y Van Spronsen C.J. (1982), "The measurement of heart rate variability spectra with the help of a personal computer", *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. BME-29, n. 7, pp. 503-510.
- Rompelman O. y Ros H.H. (1986), "Coherent averaging technique: A tutorial review. Part 1: Noise reduction and the equivalent filter. Part 2: Trigger jitter, overlapping responses and non-periodic stimulation", *J. Biomed. Eng.*, vol. 8, pp. 24-35.

- Ros H.H., Koeleman A.S.M., y van den Akker T.J. (1981), "The technique of signal averaging and its practical application in separation of atrial and His Purkinje activity", *In The signal averaging technique in clinical cardiology*, F.K. Schattauer Verlag. Stuttgart. pp. 3-15.
- Sadeh D., Shannon D.C., Abboud S., Akselrod S. y Cohen R.J. (1987), "A new technique to determine the correlation between the QT interval and heart rate for control in sides babies". *In Computers in Cardiology. IEEE Computer Society Press.*, pp. 125-127
- Schwartz P.J. y Wolf S. (1978), "QT interval prolongation as predictor of sudden death in patients with myocardial infarction.", *Circulation* 57, pp. 1074-1077.
- Shah P.M., Arnold J.M., Haberern N.A., Bliss D.T., McClelland K.M. y Clarke W.B. (1977), "Automatic real time arrhythmia monitoring in the intensive care unit", *Am. J. Cardiol.*, vol. 39, pp. 701-708.
- Sörnmo, L., Börjesson P.O., Nygard M. E., y Pahlm O. (1981), "A method for evaluation of QRS shape features using a mathematical model for the ECG", *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. BME-28, No. 10, pp. 713-717.
- Spiegel M.R. (1970), "Manual de fórmulas y tablas matemáticas", *McGraw-Hill, Mejico*.
- Taylor G.J., Crampton R.S., Gibson R.S., Stebbins P.T., Waldman M.T.G. y Beller G.A. (1981), "Prolonged QT interval at onset of acute myocardial infarction in predicting early phase ventricular tachycardia". *Am. Heart J.* 102, pp. 16-24.
- Tompkins W.J. y Webster J.G. (1981), "Design of microcomputer-based medical instrumentation", *Prentice-Hall, Inc. New Jersey*.
- Thakor N.V., Webster J.G. y Tompkins W.J. (1983), "Optimal QRS detector", *Med. & Biol. Eng. & Comp.*, vol. 21, pp. 343-350.
- Thakor N.V. (1984a), "From Holter monitors to automatic defibrilators: Developments in ambulatory arrhythmia monitoring", *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. BME-31, n. 12, pp. 770-778.

- Thakor N.V., Webster J.G. y Tompkins W.J. (1984b), "Estimation of QRS complex power spectrum for design of a QRS filter", *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. BME-31, n. 11, pp. 702-706.
- Udupa J.K. y Murthy I.S.N. (1980), "Syntactic approach to ECG rhythm analysis", *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. BME-27, n. 7.
- Urkowitz H. (1967), "Energy detection of unknown deterministic signals", *Proceedings of the IEEE* vol. 55, n. 4, pp. 523-531.
- Usui S. y Amidror I. (1982), "Digital Low-Pass Differentiation for Biological Signal Processing", *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. BME-29, n. 10, pp. 686-693.
- Van Alsté J.A. y Schilder T.S. (1985), "Removal of base-line wander and power-line interference from the ECG by an efficient FIR filter with a reduced number of taps", *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. BME-32, n. 12, pp. 1052-1060.
- Vaz C. A. y Thakor N.V. (1989), "Adaptive Fourier estimation of time-varying evoked potentials" *IEEE Trans. Biomed. Eng.* Vol. BME-36, No. 4, pp. 448-455.
- Waller A.D. (1887), "A demonstration on man of electromotive change accompanying the heart's beat". *J. Physiol. (London)*, 8, pp. 229-234.
- Webster J.G. (1978), "Medical instrumentation. Application and design", *Houghton Mifflin, Boston*.
- Webster J.G. (1988), "Encyclopedia of Medical Devices and Instrumentation", *John Wiley & Sons, New York*.
- Widrow. B., Glover J. R., McCool J. M., Kaunitz J., Williams C. S., Hearn R.H., Zeidler J.R., Dong E., JR., y Goodlin R. C. (1975). "Adaptive noise cancelling: Principles and Applications", *Proceedings of the IEEE*, vol. 63 No. 12. pp. 1692-1716.
- Widrow. B. y Stearns S. D. (1985). "Adaptive signal processing" *Prentice-Hall, New Jersey*.

Yi-Sheng Z. y Thakor N.V. (1987), "P-wave detection by an adaptive QRS-T cancelation technique", *Computers in Cardiology IEEE. IEEE Computer Society Press.* pp. 249-252.



