

Análisis de la Codificación de Alamouti Distribuida sobre Cooperación DF

Juan Romero⁽¹⁾, Enrique Masgrau⁽¹⁾
484153@unizar.es, masgrau@unizar.es

⁽¹⁾ Grupo de Tecnologías de las Comunicaciones (GTC). Instituto de Investigación I3A. Universidad de Zaragoza. C/María de Luna 1, Edificio A. Byron. 50018 Zaragoza. Spain

Abstract- In this work, a distributed Alamouti scheme is studied. We propose a method to combine Alamouti codification with Decode & Forward (DF) cooperative communication in which two users transmit information with one antenna in each terminal. First, the system model is presented. After that, a theoretical expression for the conditional BER is derived. We compare the performance of the system with DF and SISO (Single Input – Single Output) systems (after presenting them) by means of computer simulations that also validate the theoretical expression for the conditional BER. Finally, we show that the distributed Alamouti scheme doubles the spectral efficiency of DF systems providing the same BER.

I. INTRODUCCIÓN

La investigación en sistemas de comunicaciones MIMO (Multiple Input – Multiple Output) ha venido experimentando continuos avances en los últimos años. Sin embargo, en aplicaciones como la telefonía móvil celular, su implementación es tecnológicamente difícil (uso de múltiples antenas en los terminales) y económicamente costosa. Paralelamente, aunque de forma más discreta, han aparecido los llamados sistemas de transmisión cooperativa, que proponen que diferentes terminales monoantena cooperen de forma que se pueda crear un *array virtual* de antenas en transmisión (o recepción), solucionando parte de los problemas antes comentados. Aunque desde un principio los sistemas cooperativos se han venido basando en la implementación distribuida de sistemas de diversidad espacial “clásicos”, el mayor reto de cara al futuro se encuentra en explorar de qué manera y hasta qué punto las potenciales capacidades de los sistemas MIMO pueden ser aprovechadas en un esquema de transmisión cooperativo. Dicho objetivo, sin duda ambicioso, es el que ha motivado los trabajos que se exponen en este artículo, en el que se aborda el estudio de las prestaciones de un sistema de comunicaciones que utilice la codificación de Alamouti de un modo distribuido sobre un sistema cooperativo DF (Decode&Forward), con la esperanza de que los resultados obtenidos puedan ser un primer paso para señalar las principales ventajas e inconvenientes de este tipo de sistemas. Finalmente, se comparan los resultados obtenidos con los conocidos para los sistemas SISO (Single Input – Single Output) y DF (este último con codificación de repetición).

II. MODELO DEL SISTEMA Y PARÁMETROS

La medida de las prestaciones de un sistema se realiza, en este trabajo, a través de la tasa de error en el bit (BER) que se obtiene en la transmisión de un mensaje en un tiempo fijo y con un gasto energético total determinado para todo sistema, a fin de garantizar la justicia (homogeneidad) en las

comparaciones. Analizaremos enlaces ascendentes (desde el móvil hasta la estación base (BS)) con la misma atenuación media para todos los terminales. La modulación empleada será en todos los casos BPSK coherente. El conocimiento del estado del canal (CSI) se supone perfecto en recepción. Los usuarios conocen la fase y el retardo introducidos por el canal interusuario. Los canales sufren desvanecimientos rápidos, planos en frecuencia y ergódicos de tipo Rayleigh, que son incorrelados espacialmente. Además introducen ruido AWGN. De esta manera, en un hipotético enlace punto a punto, la señal en recepción será (en forma equivalente paso bajo y en tiempo discreto):

$$y(t) = \alpha(t)s(t) + n(t) \quad (1)$$

donde $s(t) = \sqrt{E_b} \cdot b(t)$ y $b(t) \in \{-1, +1\}$, $\alpha(t)$ es una variable aleatoria Rayleigh de potencia $E[\alpha^2(t)] = 1/L$ (donde L es la atenuación media del canal) que representa el módulo del equivalente complejo paso bajo del canal ($h(t) = \alpha(t)e^{j\theta(t)}$), que es una variable aleatoria compleja gaussiana circularmente simétrica de media nula (ZMCSCG). La fase tiene distribución uniforme. Salvo que se diga lo contrario, supondremos que $h(t)$ varía con cada bit transmitido. Por último, $n(t)$ es una variable aleatoria compleja ZMCSCG con varianza N_0 que recoge el efecto del ruido térmico y E_b es la energía por bit transmitido.

Con estas premisas y aplicando conceptos básicos de comunicaciones digitales, la probabilidad de error condicional de una transmisión SISO será:

$$P_b(\alpha) = Q\left(\sqrt{2\frac{\alpha^2 E_b}{N_0}}\right) \quad (2)$$

siendo $Q(x)$ la función de error complementaria:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \quad (3)$$

El cálculo de la probabilidad de error incondicional se puede encontrar en la literatura [1]. El resultado es:

$$P_b = E_\alpha[P_b(\alpha)] = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_b}{1 + \bar{\gamma}_b}}\right); \bar{\gamma}_b = E[SNR] = L^{-1} \frac{E_b}{N_0} \quad (4)$$

La representación gráfica se puede encontrar en la Fig.2.

III. COOPERACIÓN DF

En este apartado presentaremos brevemente el modo de operar de la cooperación DF con codificación de repetición,

los resultados analíticos para su BER y los resultados obtenidos por simulación.

A. Modo de operar

La cooperación se estructura en dos periodos básicos. En el primero cada terminal transmite su símbolo a la vez que recibe el símbolo transmitido por el cooperante. En el segundo periodo, cada usuario retransmite el símbolo que ha recibido de su compañero en el primer periodo, de la forma en que se puede observar en la Fig.1. Es de destacar que durante el primer periodo los terminales efectúan una decisión "hard" sobre el símbolo recibido; cabe, entonces, la posibilidad de que dicha decisión sea errónea. La probabilidad de este suceso viene determinada por la calidad del canal interusuario.

A la luz de la Fig.1 se puede observar que, para mantener el tiempo y la energía de la transmisión iguales que en la comunicación SISO equivalente, se tienen las siguientes relaciones para el periodo y la energía del bit:

$$T_{b,SISO} = 2T_{b,DF} \Rightarrow E_{b,SISO} = 2E_{b,DF} \quad (5)$$

que han de ser tenidas en cuenta a la hora de realizar comparaciones homogéneas.

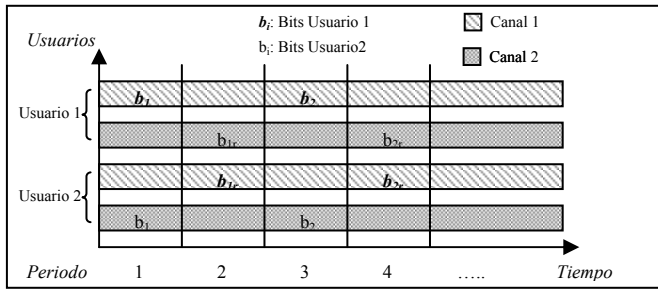


Fig. 1. Organización de la transmisión en cooperación DF

B. Probabilidad de error teórica

La deducción detallada de la probabilidad de error condicional para DF se puede encontrar en [2] para el caso de un sistema CDMA y un receptor concreto y en [3] para un caso más general, que corresponde al resultado que a continuación se detalla:

$$P_b(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}) = (1 - P_{b12}(\alpha_{12})) \cdot Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0} \frac{k_1 \alpha_1 + \lambda k_2 \alpha_2}{k_1^2 + \lambda^2 k_2^2}}\right) + P_{b12}(\alpha_{12}) \cdot Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0} \frac{k_1 \alpha_1 - \lambda k_2 \alpha_2}{k_1^2 + \lambda^2 k_2^2}}\right) \quad (6)$$

siendo $P_{b12}(\alpha_{12})$ el BER del canal interusuario, según (2). Se asume un receptor tipo λ -MRC [2][3] de parámetros genéricos (k_1, k_2, λ) . Los subíndices "1" y "2" representan los trayectos desde el usuario 1 y el usuario 2 hasta la BS respectivamente, mientras que "12" hace referencia al canal interusuario. La probabilidad de error incondicional no se ha podido determinar analíticamente, por lo que se recurre a las simulaciones por ordenador que se muestran a continuación

C. Resultados obtenidos por simulación

Se han realizado simulaciones en Matlab de los sistemas DF y SISO. En el caso del primero, se han fijado los valores del receptor en $(\alpha_1, \alpha_2, 1)$ y se han simulado distintos canales interusuario (el valor $\bar{\gamma}_b$ de cada uno se encuentra en la leyenda de la gráfica). Los resultados se pueden observar en la Fig.2. Todos los valores de $\bar{\gamma}_b$ que se encuentran vienen referidos al sistema SISO en recepción por lo que para el sistema DF serán 3 dB inferiores.

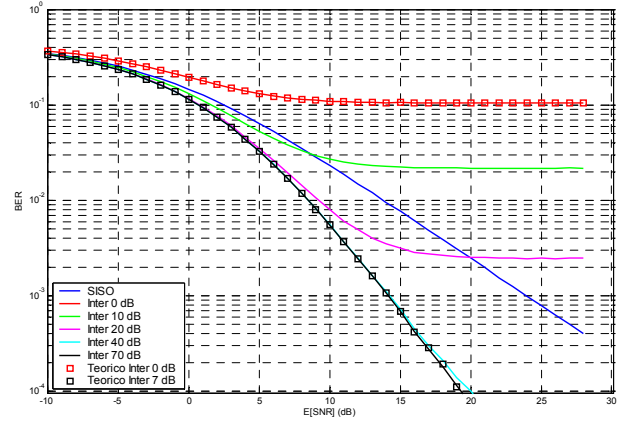


Fig. 2. Simulaciones SISO y DF.

IV. CODIFICACIÓN ALAMOUTI-DF

La codificación de Alamouti para sistemas MIMO [4], reflejada en la Fig. 3, es un algoritmo simple de codificación espacio-temporal (ST) muy popular hoy en día. En este apartado se expone una manera de trasladar dicha codificación a un sistema distribuido (cooperativo) para así disponer de una codificación ST distribuida (DST Codification) cuyas prestaciones serán contrastadas con los sistemas SISO y DF.

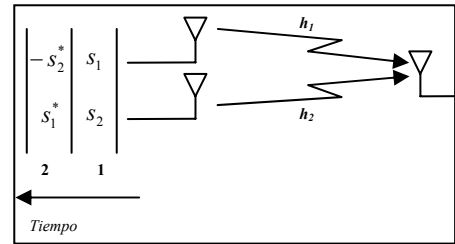


Fig. 3. Codificación de Alamouti genérica (MIMO)

A. Modo de operar

Para que el modelo propuesto funcione correctamente, se ha de exigir que ambos terminales transmitan sendos mensajes individuales simultáneamente. En esta situación, llamaremos mensaje global o simplemente mensaje a la siguiente sucesión de bits:

$$\{b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, b_{31}, b_{32}, \dots\} = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, \dots\} \quad (7)$$

En el primer miembro de la ecuación podemos identificar los bits de cada mensaje individual, donde el segundo subíndice indica el terminal. En el segundo miembro se renombra la secuencia de una forma más compacta.

Con estos datos, podemos plantear el esquema de transmisión que se observa en la Fig. 4. En este caso se supone que $h(t)$ permanece constante en dos periodos de señalización. El poder separador que incorpora la codificación ST hace posible que se utilice un único canal para transmitir dos mensajes individuales. Las restricciones sobre tiempo y energía son claramente las mismas que las recogidas en (5). Naturalmente, los bits transmitidos en los periodos pares del patrón están sujetos a posibles errores, lo que hará que la codificación efectiva en el receptor deje de ser *ortogonal* en algunos casos. La pérdida de ortogonalidad de la codificación efectiva, cuya frecuencia relativa dependerá de la calidad del canal interusuario, producirá una pérdida de prestaciones respecto al sistema MIMO de la Fig. 3.

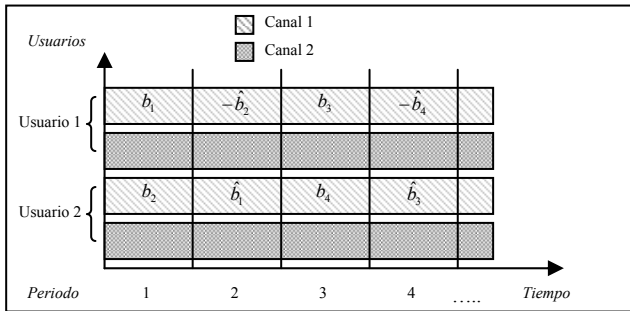


Fig. 4. Codificación Alamouti-DF (BPSK)

B. Probabilidad de error teórica

Hallaremos el BER de los bits correspondientes al primer mensaje individual, que será el mismo que el correspondiente al segundo mensaje individual. Dividiremos el análisis en cuatro supuestos, dependiendo de los posibles errores en las transmisiones por el canal interusuario en los periodos impares de la Fig. 4.

B.1. No se producen fallos en el canal interusuario

Se produce una situación equivalente a la de un caso MIMO 2x1. En la BS se tiene, tras dos periodos:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2^* \end{pmatrix} = \sqrt{E_b} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2^* & -h_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2^* \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{y} = \sqrt{E_b} \mathbf{H} \mathbf{b} + \mathbf{n} \quad (8)$$

La estructura de la codificación de Alamouti hace que la matriz del canal sea ortogonal, lo que posibilita que el receptor realice la siguiente operación:

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}^H \mathbf{y} = \sqrt{E_b} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \mathbf{b} + \tilde{\mathbf{n}} \quad (9)$$

con lo que los dos bits quedan separados. Sobre el vector de ruido se puede comprobar que:

$$\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{H}^H \mathbf{n} \Rightarrow E\{\tilde{\mathbf{n}}\} = \mathbf{0} \wedge E\{\tilde{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{n}}^H\} = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) N_0 \mathbf{I}_2 \quad (10)$$

Podemos ya calcular el BER para el primer bit, teniendo en cuenta que la decisión se realiza de la siguiente manera:

$$\hat{b}_1 = \text{sgn}\{\text{Re}(z_1)\} = \text{sgn}\left\{\sqrt{E_b} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) b_1 + \text{Re}(\tilde{n}_1)\right\} \quad (11)$$

Nuestra constelación es real y, por tanto, la parte compleja del ruido es ortogonal a nuestro espacio de la señal. Entonces

$$E\left\{\left[\text{Re}(\tilde{n}_1)\right]^2\right\} = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \frac{N_0}{2} \quad (12)$$

Por tanto, la probabilidad de error en este primer supuesto es:

$$P_b^{(1)} = P\left\{\text{Re}(\tilde{n}_1) > \sqrt{E_b} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\right\} = Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}\right) \quad (13)$$

B.2. Error en la transmisión desde el terminal 1 al 2

Este es un fenómeno no previsto cuando se desarrolló la codificación de Alamouti. En recepción se tiene:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2^* \end{pmatrix} = \sqrt{E_b} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ -h_2^* & -h_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2^* \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{y} = \sqrt{E_b} \mathbf{H}_{err} \mathbf{b} + \mathbf{n} \quad (14)$$

siendo

$$\mathbf{H}^H \mathbf{H}_{err} = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 - \alpha_2^2 & 0 \\ 2h_1 h_2^* & \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

una matriz que ya *no es diagonal*. En estas circunstancias, para el primer bit tendremos:

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}^H \mathbf{y} \Rightarrow z_1 = \sqrt{E_b} (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) b_1 + \tilde{n}_1 \quad (16)$$

donde se observa que se produce una gran degradación de su relación señal a ruido respecto a lo que sucedía en (9). Para el segundo bit:

$$z_2 = \sqrt{E_b} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) b_2 + 2\sqrt{E_b} h_1 h_2^* b_1 + \tilde{n}_2 \quad (17)$$

el efecto que se produce es la influencia del primer bit en el punto del espacio de la señal que representa al segundo. Para el primero, la probabilidad de error es:

$$P_b^{(2)} = P\left\{\text{Re}(\tilde{n}_1) > \sqrt{E_b} (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)\right\} = Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0} \frac{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}{\sqrt{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}}}\right) \quad (18)$$

Calcularemos ahora la probabilidad de error para el segundo, $P_b^{(2)}(b_2)$ que nos servirá posteriormente para analizar el supuesto B.3. Asumiendo que la generación de bits es equiprobable:

$$P_b^{(2)}(b_2) = \frac{P_b^{(2)}(b_2|b_1=-1) + P_b^{(2)}(b_2|b_1=1)}{2} \quad (19)$$

$$P_b^{(2)}(b_2|b_1=-1) = \frac{P_b^{(2)}(b_2=1, b_1=-1) + P_b^{(2)}(b_2=-1, b_1=-1)}{2} = \frac{p_1 + p_2}{2} \quad (20)$$

$$P_b^{(2)}(b_2|b_1=1) = \frac{P_b^{(2)}(b_2=1, b_1=1) + P_b^{(2)}(b_2=-1, b_1=1)}{2} = \frac{p_3 + p_4}{2} \quad (21)$$

calculando los valores de p_4 y p_3 :

$$p_4 = P\left\{\text{Re}(\tilde{n}_2) > \sqrt{E_b} \left[(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - 2\alpha_1 \alpha_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right]\right\} = Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0} \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1 \alpha_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}}\right) \quad (22)$$

$$p_3 = P\left\{\text{Re}(\tilde{n}_2) < -\sqrt{E_b} \left[(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - 2\alpha_1\alpha_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right]\right\} =$$

$$= Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0} \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}} \right) \quad (23)$$

Debido a la simetría de la distribución gaussiana, se puede comprobar que

$$p_2 = p_3 \wedge p_1 = p_4 \quad (24)$$

por lo que el resultado final es

$$P_b^{(2)}(b_2) = \frac{1}{2} \left[\frac{p_1 + p_2}{2} + \frac{p_3 + p_4}{2} \right] = \frac{p_3 + p_4}{2} \quad (25)$$

y sustituyendo

$$P_b^{(2)}(b_2) = \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0} \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0} \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}} \right) \quad (26)$$

B.3. Error en la transmisión desde el terminal 2 al 1

Este caso es simétrico al anterior. Aquí el primer y el segundo bit cambian sus papeles respecto al supuesto 2. Apoyándonos en los resultados del punto anterior relativos al segundo bit, en la conmutatividad de las operaciones adición y producto y en la paridad de la función coseno, podemos asegurar que, en este caso, para el primer bit

$$P_b^{(3)} = P_b^{(2)}(b_2) \quad (27)$$

B.4. Error en ambos sentidos de la transmisión

Cuando ambos bits son recibidos incorrectamente por los cooperantes, en la recepción se tiene:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2^* \end{pmatrix} = \sqrt{E_b} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ -h_2^* & h_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{y} = \sqrt{E_b} \mathbf{H}_{err} \mathbf{b} + \mathbf{n} \quad (28)$$

con

$$\mathbf{H}^H \mathbf{H}_{err} = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 - \alpha_2^2 & 2h_1^* h_2 \\ 2h_1 h_2^* & \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \end{pmatrix} \quad (29)$$

En estas circunstancias de pérdida total de ortogonalidad, para el primer bit tendremos:

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}^H \mathbf{y} \Rightarrow z_1 = \sqrt{E_b} \left[(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) b_1 + 2h_1^* h_2 b_2 \right] + \tilde{n}_1 \quad (30)$$

De la misma manera que se ha operado en los puntos precedentes se podría proceder aquí. Obsérvense además las similitudes entre estas ecuaciones y la correspondiente al canal efectivo del segundo bit en el segundo supuesto. Usando el mismo método se llega a la siguiente expresión:

$$P_b^{(4)} = \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0} \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0} \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}} \right) \quad (31)$$

B.5. Probabilidad total condicional

Combinando los cuatro resultados obtenidos con la probabilidad de error en el canal interusuario podemos

obtener la probabilidad total condicionada al estado de los diferentes canales:

$$P_b|_{\{h_i\}} = (1 - P_{b12})^2 P_b^{(1)} + P_{b12}(1 - P_{b12}) [P_b^{(2)} + P_b^{(3)}] + P_{b12}^2 P_b^{(4)} \quad (32)$$

C. Resultados obtenidos por simulación

De nuevo, la probabilidad de error incondicional no se ha hallado analíticamente, por lo que se recurre a simular el sistema descrito para las mismas condiciones que muestra la Fig. 2. A la vez, se comprueba la validez del desarrollo teórico promediando los datos obtenidos según (32) para las diferentes realizaciones del canal. Se puede observar que las predicciones teóricas concuerdan con los resultados experimentales.

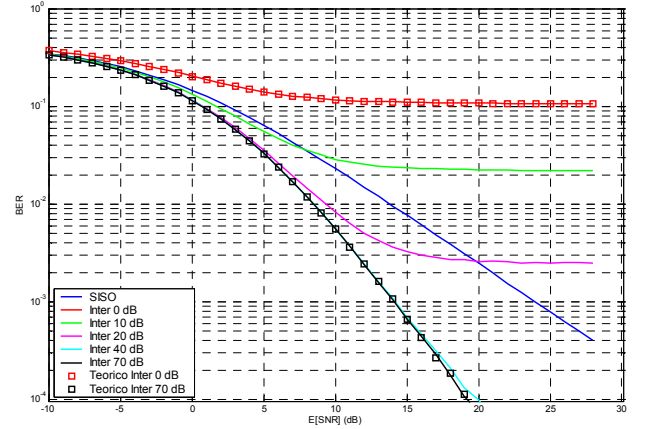


Fig. 5. Simulaciones Alamouti-DF

V. COMPARACIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados (BER) obtenidos mediante la codificación Alamouti-DF son exactamente iguales a los obtenidos con la técnica DF original. Sin embargo, la primera técnica *dobla la eficiencia espectral* de DF al usar un solo canal para transmitir los dos mensajes individuales. Ambas técnicas son muy sensibles a la calidad del canal interusuario, por lo que sólo extraen diversidad de segundo orden con valores altos de SNR en dicho canal, presentando un claro efecto de saturación en caso contrario. Este hecho ha llevado a que se propongan modificaciones en la técnica DF original para mitigar este efecto [5][3]. Los resultados aquí obtenidos invitan a intentar extenderlas a la codificación Alamouti-DF para mejorar dichos resultados conservando la ganancia en la eficiencia espectral que se ha obtenido.

REFERENCIAS

- [1] J. G. Proakis. "Digital Communications". Fourth Edition. McGraw-Hill, 2001.
- [2] A. Sendonaris, E. Erkip, B. Aazhang: "User Cooperation Diversity Part I and Part II", *IEEE Trans. Communications*, vol. 51, no. 11, Nov. 2003.
- [3] Juan Romero. "Técnicas de Transmisión Cooperativa en Redes Inalámbricas". Proyecto Fin de Carrera de Ing. de Telecomunicación. Depto. Ingeniería Electrónica y Comunicaciones. Universidad de Zaragoza. Diciembre de 2005.
- [4] Siavash M. Alamouti: "A Simple Transmit Diversity Technique for Wireless Communications". *IEEE Journal on Select Areas in Communications*, vol. 16, no. 8, October 1998.
- [5] J. N. Laneman, G. W. Wornell, D. N. C. Tse: "An Efficient Protocol for Realizing Cooperative Diversity in Wireless Networks". *Proc. IEEE ISIT*, Whashington, DC, June 2004.